TENTO TEXT JEŠTĚ NENÍ OPATŘEN OBRÁZKY

OD MĚŘENÍ OBSAHŮ A OBJEMŮ K INFINITESIMÁLNÍMU POČTU

Výpočet obsahu některých rovinných obrazců a objemů některých těles patří k standardním součástem školské matematiky. Děti se v této souvislosti ve škole naučí pár vzorců, které posléze zase úspěšně -- až na výjimky -- zapomenou. Pokud se později alespoň některé z nich dozvědí na střední škole něco málo o integrálním počtu, zafixují si snad alespoň to, že uvedené typy úloh se počítají pomocí nějakých integrálů. Při obvyklém uspěchaném výkladu školské matematiky (což není ani v nejmenším míněno jako výtka učitelům matematiky, ale jen konstatování faktu) není většinou především z časových důvodů možné ani naznačit, že matematické výsledky nejsou *dány shůry*, ale vznikly dlouhým vývojem a úsilím generací vědců, kteří kousek po kousku dospívali k výsledkům, které my dnes prezentujeme jako konečné.

Pokusme se proto nyní alespoň stručně naznačit, jakého intelektuálního úsilí bylo třeba ke zvládnutí problémů měření obsahů a objemů, k vytvoření kalkulu, kterým tyto úlohy standardně řešíme.

Není sporu, že úlohy o obsazích a objemech patří k nejstarším praktickým úlohám, které se lidé učili řešit. Doklady tohoto faktu najdeme prakticky ve všech dochovaných materiálech z předantických kultur. Jako typický příklad si vyberme ukázky ze starého Egypta.

Egyptská matematika

Ke vzniku geometrické terminologie přispělo již ve 3. tisíciletí před naším letopočtem zemědělství. Tato terminologie se sice v dalším vývoji neudržela, svědčí však o svém původu z praxe.

Obrazec byl nazýván „pole“, pravoúhelník „čtyřrohé pole“, kruh „oblé“pole. Představíme-li si tvar údolí klesajícího k Nilu, shledáme, že zaplavené území v nich mělo tvar „podlouhlých trojúhelníků“, které se při rozdělování rozpadly na „trojúhelník!, řadu „lichoběžníků“ až posléze „pravoúhelníků“.

Základním tvarem pole byl *obdélník*, pro výpočet jeho obsahu byl v papyrech nalezen vzorec (součin „délky“ a „šířky). Odvození vzorce mohlo vycházet z tzv. pruhové míry, zvané též „polní loket“, která vycházela z pruhu zorané půdy.

Počet těchto vyoraných pruhů (polních loktů) se násobil délkou pruhu, součin dával dosti přesný odhad pro stanovení množství zasévaného obilí. *Trojúhelník*, který vznikal na konci údolí, kam až zasahovala voda zaplavující údolí, byl většinou rovnoramenný; pro něj nalézáme v Moskevském papyru (úloha 4) a v Rhindově papyru (úloha 51) termíny „vtok“ (pro základnu) a „hranice“ (pro výšku jako vzdálenost místa, kam až zasahovala voda, od „vtoku“). Obsah trojúhelníku byl pak dán výrazem $\frac{z}{2} \cdot v$, trojúhelník byl vlastně proměňován na obdélník.

Obdobně se postupovalo s *rovnoramenným lichoběžníkem*. I tam byl „vtok“ *a*, „odřez“ *b* a „hranice“ v_1. V 52. úloze Rhindova papyru se říká, že „vtok a odřez se sečtou, součet se dělí, aby se to dodělalo na obdélník a konečně se násobí hranicí, tedy $\frac{a+b}{2} \cdot v_1$. Je zajímavé, že jen v jednom pramenu (darovací listině svatyně v Edfu z 1.-2. století před n.l.) se setkáváme s jiným útvarem než byly dosud zmíněné. I to nás může utvrdit v tom, že praktické výpočty vedly k prvním správným geometrickým pravidlům. Ve zmíněné listině je asi 150 příkladů na výpočet obsahů rovinných obrazců; pro obecné čtyřúhelníky o stranách s velikostmi *a,b,c,d* se uplatňuje přibližný výpočet $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, který dává přesný výsledek jen pro pravoúhelníky. Na základě úvahy, že trojúhelník lze považovat za čtyřúhelník, který má jednu stranu nulovou, je týž vzorec uplatněn i pro výpočet obsahu trojúhelníků.

K pochopení toho, jak vypadala tehdejší „matematika“, uveďme několik autentických úloh ze staroegyptských pramenů.

Jak víme, naše hlavní poznatky o egyptské matematice čerpáme především ze dvou pramenů. Jsou jimi tzv. **Moskevský papyrus** pocházející z 19. stol. př. n. l. a **Londýnský (Rhindův) papyrus**, který je asi o 200 let mladší. První z nich je značně poškozen; lze v něm přečíst 25 úloh s řešeními. Londýnský papyrus obsahuje úloh 84, přičemž v některých příkladech se papyry překrývají.

Číselná symbolika, kterou v přepisu úloh z těchto papyrů užíváme, je dnes obvyklá. Egypťané užívali desítkové soustavy a sčítacího principu, užívali pouze *kmenných zlomků*, tj. zlomků tvaru 1/n , které zapisujeme symbolem $\overline{n}$. Jedinou výjimkou byl zlomek 2/3, který značíme $\overline{\overline{3}}$. V dalším textu proto například zápis $3\ \overline{2}\ \overline{4}$ značí $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Rozměry obdélníku, úloha č. 6 z Moskevského papyru

Vzor pro výpočet obdélníku.

Je Ti dán obdélník o výměře 12; jeho šířka je $\overline{2}\ \overline{4}$ jeho délky. Počítej s $\overline{2}\ \overline{4}$ abys dostal 1. Vychází $1\ \overline{3}$. Počítej s těmi 12 ve výměře krát $1\ \overline{3}$, vyjde 16. Vypočti kořen (doslova „úhel“). Vyjdou 4 na délku, z toho $\overline{2}\ \overline{4}$ jsou 3 na šířku. Výpočet je, jak se dělá.

Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, úloha č. 17 z Moskevského papyru

Vzor pro výpočet trojúhelníku.

Je Ti dán trojúhelník o výměře 20. Jeho šířka je $\overline{3}\ \overline{15}$ jeho délky. Počítej s těmi 20 ve výměře krát 2. Vyjde 40. Počítej s $\overline{3}\ \overline{15}$, abys nalezl 1. Bude to $2\overline{2}$. Počítej 40 krát $2\overline{2}$. Vyjde 100. Vypočti kořen. Vyjde 10. Hle, těchto 10 je jeho délka. Počítej $\overline{3}\ \overline{15}$ z 10. Budou to 4. Hle, tyto 4 jsou jeho šířka, nalezl jsi správně.

Výměra kruhového pole, úloha č. 50 z Rhindova papyru

Vzor pro výpočet (výměry) kruhového pole o průměru 9.

Jak poznáš výměru pole? Zjistíš jeho $\overline{9}$, to je 1. Zbytek je 8. Vypočítej 8 krát 8. Bude to 64. Znáš to pole o výměře 64. Vypočteno, jak má být.

(Na papyru jsou též zapsány numerické výpočty ve zvláštním sloupci v závěru textu.)

Povrch koše, úloha č. 10 z Moskevského papyru

Řekne-li se Ti, koš nahoře otevřený s $4\,\overline{2}$ v něm obsažených. Ukaž jeho povrch. Počítej $\overline{9}$ z 9, protože koš je polovina vejce. Vychází 1. Počítej zbytek jako 8. Počítej $\overline{9}$ z 8, to dává $\overline{3}\ \overline{6}\ \overline{18}$. Počítej zbytek z těch 8 po odebrání těch $\overline{3}\ \overline{6}\ \overline{18}$. Vychází $7\overline{9}$. Počítej $7\overline{9}$.krát $4\,\overline{2}$. Vychází 32. To je ten povrch. Nalezl jsi správně.

Objem komolého jehlanu, úloha č. 14 z Moskevského papyru

Vzor pro výpočet pyramidy, která nemá vrchol}

Je Ti dána useknutá pyramida vysoká 6 loktů, 4 na spodní hraně, 2 na horní hraně. Počítej s těmi 4 tak, že je umocníš. Vyjde 16. Zdvojnásob 4, vyjde 8. Vypočítej druhou mocninu oněch 2. Vyjde 4. Sečti těchto 16 a těchto 8 a tyto 4. Vyjde 28. Vypočítej $\overline{3}$ ze 6; vychází 2. Vypočti 28 krát 2, vyjde 56. Hle, je to 56. Nalezl jsi správně.
Na připojeném obrázku je hieroglyfický přepis textu této úlohy (originál je v méně výrazném hieratickém písmu). Text se čte zprava doleva.

Sklon pyramidy (seked), úloha č. 36 z Hindova papyru}

Vzor pro výpočet pyramidy

360 je strana její podstavy, 250 je výška, dej mi poznat její seked (= sklon).

Výpočet: $\overline{2}$ ze 360 je 180.

	1	250
\	$\overline{2}$	125
\	$\overline{5}$	50
\	$\overline{50}$	5
$\overline{2}\ \overline{5}$	$\overline{50}$	180

(V papyru se výsledek $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$ chápe jako vyjádřený v loktech, převádí se na dlaně (1 loket v = 7 dlaní), sedminásobek dává $5\ \overline{25}$ dlaně.)

Pomineme-li aspekty typické právě jen pro egyptskou matematiku (zápisy čísel, konkrétní kalkulus apod.), můžeme ve výše uvedených textech snadno vysledovat řadu charakteristických typů typických pro matematiku „předvědeckého období obecně, nejen tedy pro matematiku egyptskou. Uveďme jen následující.

- Početní postupy jsou demonstrovány na konkrétních příkladech. Přestože - jak lze snadno ověřit - je výpočet de facto často prováděn podle těchže „vzorců“, jakých užíváme my, nejsou tyto vzorce ani náznakem zmíněny.
- Demonstrované postupy nejsou nijak odvozovány, výpočet není ani náznakem zdůvodněn.
- Text postrádá veškeré atributy, které dnes u matematického textu považujeme za téměř samozřejmé: symbolický zápis operací, označení proměnných atd.

Všechny tyto rysy nabývají nové podoby až v antickém období. Proto právě do starého Řecka klademe vznik *matematiky jako vědy* v moderním smyslu.

Řecká matematika

Jakkoliv dosáhla egyptská i mezopotámská matematika při výpočtech obsahů ploch a objemů těles řady pozoruhodných výsledků, řešila jen některé standardní typy úloh (trojúhelník, lichoběžník, pyramida atd.). Obecné úlohy, kdy hranice je tvořena křivkou či plochou, začali řešit až Řekové.

Zamyslíme-li se nad tím, jak dnes odvozujeme vztahy pro výpočet úloh tohoto typu, či ideu, na níž je založen všeobecně známý nástroj na řešení těchto problémů - tzv. *Jordanova míra*, je základní idea vcelku jednoduchá. Zjišťovaný obsah (objem) aproximujeme zdola a shora pomocí vepsaných a opsaných útvarů daného typu (čtverců, krychlí), jejichž míru známe. Intuice nám přitom napovídá, že čím „jemnější“ jsou ony útvary, tím lepší aproximaci obdržíme.
Integrál pak obdržíme vlastně nekonečným prodloužením těchto aproximací: součtem - názorně řečeno - *nekonečně mnoha nekonečně malých veličin*.

Uvedená idea je natolik jednoduchá, že její kořeny lze vystopovat v dávné minulosti. Jejím autorem je EUDOXOS z Knidu, který ve 4. století př. n.l. vypracoval tzv. e**xhaustivní** (vyčerpávací) metodu, která je geniální předchůdkyní pozdějších infinitesimálních úvah.

Eudoxovy práce se nám nedochovaly, jeho metoda je však podrobně rozpracována v Eukleidových *Základech*, které byly napsány o několik desetiletí později.

Teoretickým základem Eudoxových úvah bylo tvrzení, které Eukleides dokazuje v 1. odstavci X. knihy:

Jsou-li dány dvě nestejné veličiny a od větší odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná menší veličina}.

Dnešní terminologií řečeno:

Jsou-li a, b *reálná čísla,* $0 < a < b$*, pak existují taková kladná čísla* $c_1, c_2, \ldots, c_n < 1/2$, že $b.c_1.c_2 \ldots c_n < a$. *(V důkazu Eukleides užívá tvrzení, kterému se dnes běžně říká Archimédův axióm: K reálným $0 < a < b$ existuje takové přirozené n, že $n.a > b$.)*

Eudoxos samotný postupoval tak, že hledanou hodnotu **poměrů** obsahů či objemů odhadl a pak **sporem** dokazoval její logickou nutnost. Eukleides tímto způsobem v *Základech* odvozuje následující tvrzení.

Obsahy kruhů jsou v témže poměru jako čtverec jejich průměrů.

Objemy jehlanů o stejné výšce jsou témže poměru jako obsahy jejich podstav.

Objem kužele je třetina válce majícího touž podstavu a stejnou výšku.

Objemy koulí jsou v témže poměru jako krychle jejich průměrů.

Eudoxovu exhaustivní metodu významně rozpracoval ARCHIMÉDÉS, který bývá často nesprávně uváděn jako její tvůrce. Archimédes mistrně zvládl Eudoxovu metodu i myšlenkové postupy *atomistické školy* (například představy o složení ploch z úseček či velmi úzkých rovnoběžníků); geniálně využíval rovněž svých fyzikálních znalostí. Takto získal odhad výsledku a exhaustivní metodou pak tyto výsledky dokázal.

Eudoxovu metodu využíval dvojím způsobem:

- vyšetřovanou míru M aproximuje dvěma posloupnostmi (a_n), (b_n) s kladnými členy tak, že pro každé přirozené n platí $a_n < M < b_n$; hodnotu S (z dnešního hlediska jde o společnou limitu uvedených posloupností) bere z odhadu a rovnost $M = S$ dokazuje tím, že od předpokladů $M < S$, $M > S$ dojde ke sporům (zpravidla k důsledkům, že pro některé n platí $b_n < S$ či $a_n > S$;

- vyšetřovanou míru *M* vyjadřuje dvěma posloupnostmi (a_n), (c_n) s kladnými členy tak, že pro každé přirozené n platí $M = a_n + c_n$, přičemž pro každé kladné ε dovede najít takové n, že $cn < \varepsilon$; hodnotu S bere z odhadu a rovnost M = S dokazuje tím, že od předpokladů M < S, M > S dojde ke sporům.

Archimédův důvtipný styl výkladu demonstrujme na dvou ukázkách.
V první uvedeme podstatnou část jeho dopisu Eratosthénovi. Tento rukopis byl nalezen až v r. 1906. Je v něm výstižně charakterizována jeho důmyslná metoda objevování výsledků, při níž výrazně uplatňuje své fyzikální myšlení. (Jako lemmata zde cituje své dřívější výsledky odvozené v práci *O rovnováze rovinných útvarů*.)

Jak však Archimédés v závěru této brilantní práce píše, uvedenou úvahu nepovažuje za přesný důkaz. Ten je uveden v jeho další práci *Kvadratura paraboly*

Čtenář si jistě povšimne Archimédova stylu vyjadřování, pro který jsou typická obsáhlá souvětí. Současně si uvědomme zcela zásadní posun, který vykonala řecká matematika oproti matematice egyptské. Srovnání Archimédova textu s ukázkami z egyptských papyrů jistě bez dalšího komentáře dostatečně demonstruje co máme na mysli, když říkáme, že v antickém Řecku se matematika zrodila jako **věda**.

ARCHIMÉDÉS

Poselství Eratosthénovi o mechanických větách

Pocítil jsem nutnost napsat Ti a v téhle knize vyložit jednu zvláštní metodu, pomocí níž získáš možnost nalézat některé matematické věty pomocí mechaniky. Věřím, že Ti tato metoda bude neméně užitečná i k důkazům samotných vět. Skutečně, cokoliv jsem dříve nahlédl pomocí mechaniky, později jsem dokázal i geometricky, protože to, co se nahlédne touto metodou, není ještě důkaz; nicméně je mnohem snazší získat pomocí ní jakousi představu o zkoumané věci a pak najít i důkaz než když se zkoumá a nic se neví.

Proto já i pokud jde o ty věty o kuželi a jehlanu, pro než Eudoxos jako prvý našel důkaz, že totiž každý kužel představuje třetinu válce a každý jehlan třetinu hranolu s touž podstavou a stejnou výškou, přisuzuji nemalý díl zásluh Demokritovi, který jako první vyslovil tuto skutečnost o zmíněných útvarech, i když bez důkazu. A nám se podařilo najít nyní publikované věty touž metodou jako ty už zmíněné, proto jsem se rozhodl napsat o této metodě a zveřejnit ji, jednak proto, aby mé dřívější odkazy na ni nezůstávaly prázdnými slovy, jednak proto, že jsem přesvědčen, že může přinést matematice nemalý užitek; předpokládám, že někteří současní nebo budoucí matematici budou umět předvedenou metodou nalézt i jiné věty, které nám ještě nepřišly na mysl.

Jako první popíšeme to, co jsme jako první věc objevili pomocí mechaniky, a to, že každá úseč paraboly vytváří čtyři třetiny trojúhelníku s touž základnou a stejnou výškou, a potom každou z vět, které jsme touto metodou získali. …

Lemmata

...

3. *Jestliže těžiště každé veličiny z libovolného počtu veličin leží na jedné přímce, pak na téže přímce bude ležet i těžiště veličiny složení ze všech těchto veličin.*

4. *Těžištěm každé přímky bude její střed.*

5. *Těžištěm každého trojúhelníku bude bod, ve kterém se navzájem protínají přímky vedené z vrcholů trojúhelníka ke středům jeho stran.*

…

Nechť ABC je úseč sevřená přímkou AC a parabolou ABC; rozpůlíme AC bodem D, rovnoběžně s průměrem povedeme DBE a přímky AB, BC. Tvrdím, že úseč ABC tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC. Z bodů A,C sestrojíme AZ rovnoběžnou s DBE a CZ - tečnu k parabole. Prodloužíme CB do K a umístíme KV shodnou s CK. Představíme si rovnoramennou páku CV se středem K a nějakou přímku MX rovnoběžnou s ED.

Protože CBA je parabola, CZ její tečna a CD pořadnice, je EB rovna DB (to se dokazuje v základech teorie kuželoseček); proto, a také proto, že ZA a MX jsou rovnoběžné s ED, bude přímka MN shodná s NX, a ZK s KA. A protože CA se má k AX jako MX k XO (to se dokazuje v lemmatu 6), CA k AX jako CK ke KN, a CK je shodná s KV, potom VK se má ke KN jako MX k XO. A bod N je těžištěm přímky MX, protože MN je shodná s NX, tudíž, když vezmeme přímku TH shodnou s XO a mající těžiště V, pak, aby TV byla shodná s VH, přímka TVH bude v rovnováze s MX, která zůstane ve své poloze. Úsečky na VN jsou nepřímo úměrné váhám TH a MX, t.j. VK se bude mít ke KN jako MX k HT.

Bod K bude těžištěm veličiny složené z obou vah TH a MX. Obdobně všechny přímky vedené v trojúhelníku ZAC rovnoběžně s ED, budou v rovnováze se svými částmi v úseči paraboly, které přeneseme do V tak, aby K byla těžištěm veličiny složené z každé dvojice takových přímek. A protože trojúhelník CZA se skládá ze všech takových úseček nacházejících se v trojúhelníku CZA, a úseč ABC se skládá ze všech obdobných přímek XO vzatých uvnitř paraboly, znamená to, že trojúhelník ZAC, zůstávaje ve své poloze, bude vzhledem ke K v rovnováze s parabolickou úsečí umístěnou svým těžištěm ve V tak, aby K byl těžištěm veličiny složené z nich obou. Nyní rozdělíme CK bodem S tak, aby CK byla třikrát delší než KS; potom bod S bude těžištěm trojúhelníku AZC. Protože trojúhelník ZAC, \ zůstávaje ve své poloze, je vzhledem ke K

Obrr. 3

v rovnováze s úsečí BAC umístěnou těžištěm ve V, a těžiště trojúhelníku AZC bude v S, znamená to, že trojúhelník AZC bude k úseči ABC umístěné těžištěm ve V v témž poměru jako VK k SK. Ale VK je třikrát větší než KS: to znamená, že trojúhelník ZC bude třikrát větší než úseč ABC. Ale trojúhelník ZAC je čtyřikrát větší než trojúhelník ABC, protože ZK je shodná s KA a AD shodná s DC, to znamená, že úseč ABC tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC.

I když to není dokázáno ani celou výše uvedenou úvahou, přesto to budí dojem, že konečný závěr je správný; proto my, vidíce, že závěr není dokázán, a majíce podezření, že je správný, předkládáme geometrický důkaz, který jsme dříve našli a publikovali.

ARCHIMÉDÉS

Kvadratura paraboly

Před větou XXIV, která obsahuje onen slíbený „geometrický důkaz“, jsou v Archimédově práci věty, jež stručně vysvětlíme:

XX. *Trojúhelník, který má s úsečí paraboly společnou základnu a stejnou výšku, je větší než polovina úseče.*

Trojúhelník ABC je polovinou rovnoběžníku AMNC tvořeného tečnou v bodě B a základnou AC s ní rovnoběžnou; AM, CN jsou rovnoběžné s průměrem BF paraboly. Tvrzení věty je zřejmé z toho, že úseč je menší než rovnoběžník ACMN.

Tento poznatek lze přenést na trojúhelníky a úseče ADB, BEC sestrojené pomocí průměrů ID, KE rovnoběžných s FB.

Obr. 4

XXI. *Trojúhelník ABC je osmkrát větší než každý z trojúhelníků ADB, BEC.*

Trojúhelník ABC je prvním útvarem vepsaným do úseče ABC; druhým je sjednocení trojúhelníků ABC, ADB, BEC; třetí se získá připojením dalších trojúhelníků se základnami AD, DB, BE, EC atd.atd. Pro obsahy těchto útvarů platí:

XXII. *Vezmeme-li jakýkoliv počet ploch tvořících spojitou proporci v poměru 4 ku 1, přičemž největší se rovná trojúhelníku vepsanému do úseče, pak všechny tyto plochy dohromady budou menší než úseč.*

Archimédés důvtipně vytvořil geometrickou řadu s kvocientem 1/4, o jejímž částečném součtu odvodil větu (vyjádřenou pouze slovy):

XXIII. *Je-li* $S = a + \frac{a}{4} + \cdots + \frac{a}{4^n}$ *, pak* $S + \frac{1}{3}\frac{a}{4^n} = \frac{4}{3}a$.

Dále Archimédés využívá výše uvedené Eudoxovy věty uvedené v 10. knize Eukleidových *Základů*.

XXIV. *Každá úseč sevřená mezi přímkou a parabolou tvoří čtyři třetiny trojúhelníku, který s ní má společnou základnu a stejnou výšku*.

Nechť ADBEC je úseč sevřená mezi přímkou a parabolou, ABC je trojúhelník mající s úsečí společnou základnu a stejnou výšku; nechť plocha K tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC. Je třeba dokázat, že tato plocha se rovná úseči ADBEC.

Skutečně, když se nerovná, bude buď větší nebo menší. Nechť nejprve bude úseč ADBEC, je-li možno, větší než plocha K. Tehdy jsem vepsal trojúhelníky ADB, BEC, jak bylo řečeno výše, do úsečí zbylých po stranách, vepsal jsem další trojúhelníky mající s těmito úsečemi společné základny a výšky, a potom do takto získaných úsečí stále vpisuji dvojice trojúhelníků, které s nimi mají společné základny a výšky; potom zbývající úseče se jednou stanou menšími než ten rozdíl, o který je úseč ADBEC větší než plocha K, takže vepsaný mnohoúhelník bude větší než plocha K, ale to není možné. Skutečně, máme plochy tvořící spojitou proporci v poměru 4 ku 1, a to jmenovitě první je trojúhelník ABC, čtyřikrát větší než oba trojúhelníky ADB a BEC dohromady, dále tyto trojúhelníky jsou čtyřikrát větší než trojúhelníky vepsané do dalších úsečí a tak stále dále; je jasné, že všechny tyto plochy dohromady budou menší než čtyři třetiny největší plochy (trojúhelníku ABC), přitom K tvoří čtyři třetiny největší plochy. To znamená, že úseč ADBEC nebude větší než plocha K.

Obr. 5

Nechť nyní, je-li to možné, bude úseč ADBEC menší (než K). Vezměme plochu Z rovnou trojúhelníku ABC, potom plochu H rovnou čtvrtině Z, dále O rovnou čtvrtině H a takto budeme brát stále ve spojité proporci až do doby, kdy se poslední plocha ukáže být menší než ten rozdíl, o který je plocha K větší než úseč ADBEC.

Nechť tato menší plocha je I; tehdy plochy Z, H, O, I dohromady spolu s třetinou I tvoří čtyři třetiny Z (podle věty XXIII). Ale K také tvoří čtyři třetiny Z; to znamená, že K bude rovna plochám Z, H, O, I vzatým spolu s třetinou I. Protože plocha K je větší než plochy Z,H,O,I o veličinu menší než I, ale úseč ADBEC je větší o veličinu větší než I, je jasné, že plochy Z,H,O,I budou větší než úseč. To je nemožné, protože je dokázáno (věta XXII), že když se vezme libovolný počet ploch tvořících spojitou proporci v poměru 4:1, přičemž největší se rovná trojúhelníku vepsanému do úseče, pak všechny tyto plochy dohromady budou menší než úseč; to znamená, že úseč ADBEC není menší než plocha K. Ale je také dokázáno, že nebude ani větší; to znamená, že se bude rovnat ploše K. Ale plocha K tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC; to znamená, že úseč ADBEC se rovná čtyřem třetinám trojúhelníku ABC.

Zrod infinitesimálního počtu

Je všeobecně známo, že *infinitesimální počet* (tj. *diferenciální* a *integrální počet*) vytvořili v 17. století NEWTON a LEIBNIZ. Jejich práce se však nezrodila zčista jasna, ale navázala na řadu předchůdců. Mezi nejvýznamnější z nich patří například FERMAT, DESCARTES, BARROW a další. My však styl infinitesimálních úvah před Newtonem a Leibnizem demonstrujeme na pracích Keplera a Cavalieriho.

KEPLER, známý především jako astronom, vydal v roce 1615 spis *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nová stereometrie vinných sudů*) s naprosto prozaickou motivací určovat objem těchto nádob. Kepler postupoval metodou *rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých „kusů*“, jejichž objem lze jednoduše výpočtem určit. Použil tedy ten druh úvahy, které se říká **infinitesimální úvaha**.

Postup si osvětlíme na jednoduchém Keplerově způsobu určování obsahu kruhu.

Kružnice, která ohraničuje kruh, obsahuje tolik částí, kolik má bodů -- tedy nekonečně mnoho. Každou z (nekonečně malých) částí kružnice považujeme za základnu rovnoramenného trojúhelníku s ramenem, které se rovná poloměru kruhu a jehož vrchol ležící proti základně je umístěn ve středu kruhu. Obsah kruhu je pak roven součtu obsahů všech takových rovnoramenných trojúhelníků. Představme si, že kružnice se středem S je rozvinuta do úsečky AC tak, Obr. 6

že poloměr SA je k ní kolmý. Nekonečně malému BA na kružnici odpovídá dílek DC na úsečce AC. Trojúhelníky BAS, DCS mají společnou výšku AS a základnu stejné délky, tedy mají stejný obsah. Tuto proceduru lze zopakovat pro každou nekonečně malou část kružnice. Po sečtení nekonečného počtu nekonečně malých trojúhelníků Kepler správně usoudil, že obsah trojúhelníku ACS je roven obsahu kruhu a dostal tím známý vzorec, podle kterého je obsah kruhu roven polovině součinu poloměru a obvodu kruhu.

Už tento jednoduchý příklad ukazuje, že v pozadí úvahy stojí **infinitesimální technika „součtu nekonečného počtu nekonečněmalých veličin“**. Kepler ji nikterak nezdůvodňoval, sloužila mu však k určování objemů různých těles a ve zmíněné práci vyústila v praktickou metodu, jíž se objem sudu určí pomocí hůlky, kterou se zjistí některé délky.

Poněkud jiný přístup k určování objemů těles použil B. CAVALIERI. Dodnes se cituje *Cavalieriho princip*: *Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají týž poměr.*

Když pro ilustraci budeme pomocí Cavalieriho principu určovat objem kruhového kužele s poloměrem základny r a s výškou h, můžeme jej porovnat s jehlanem o výšce h se čtvercovou podstavou, jejíž strana má délku 1. Roviny, které jsou rovnoběžné s podstavami obou těles a jsou vedeny ve stejné vzdálenosti od podstav, protínají tato tělesa v kruhu, resp. Ve čtverci, jejichž obsahy jsou v konstantním poměru $\pi r^2 : 1$.

Bude-li tedy V_K objem kužele a V_J objem jehlanu, dostaneme podle Cavalieriho principu, že platí

$$\frac{V_K}{V_J} = \pi r^2 \text{ , tj. } V_K = \pi r^2 \cdot V_J \text{ .}$$

Když budeme vědět, že objem jehlanu je $V_J = \frac{1}{3} h$, dostaneme ihned objem kužele $V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$.

Obr. 7

B. Cavalieri použil **metodu porovnávání nekonečně malých částí těles**, jakýchsi vrstviček, které nazýval *indivisibilie* (*nedělitelné*). Jde přitom o nedělitelné části nižší dimenze, než je vyšetřovaný útvar; Cavalieri je nesčítal, pouze je porovnával s analogickými nedělitelnými částmi jiného útvaru.

• * *

Jak jsme však již uvedli, je vznik infinitesimálního počtu po zásluze spjat se jmény I. Newtona a G.W. Leibnize. Historie jejich objevů a vzájemného soupeření je natolik známá, že se jí můžeme věnovat jen velmi stručně.

Dnes je prokázáno, že příslušné úvahy provedl jako první NEWTON, který však otálel s jejich zveřejněním. Proto první **publikovaná** práce v této oblasti patří LEIBNIZOVI. V tomto faktu lze hledat zárodek jejich pozdějších sporů.

NEWTON, který k celé problematice přistupoval především jako fyzik, zformuloval základní úlohy matematické analýzy a nalezl postupy pro jejich řešení v r. 1666, v době, kdy kvůli morové epidemii byly uzavřeny univerzity a Newton sám pobýval na venkově u svých prarodičů. V práci z tohoto roku, kterou však nepublikoval a proto ji znali jen jeho přátelé, objevil základní vztah mezi derivací a integrálem.

LEIBNIZ započal svá bádání v tomto směru až v r. 1672, jeho vliv na současníky byl však větší než vliv Newtonův. Leibniz totiž věnoval mnohem větší pozornost symbolice a celkově byl jeho přístup matematikům bližší.

Kalkulus vybudovaný Newtonem a Leibnizem se v 18. století dočkal bouřlivého rozvoje, neboť přes veškeré nejasnosti a problémy spojené s **nekonečně malými** veličinami, na nichž byl založen, umožnil řešení řady obtížných problémů. O rozvoj matematické analýzy v 18. století se zasloužili především L. EULER, bratři Jacob a Johann BERNOULLIOVÉ, J.L. LAGRANGE a další.

V průběhu 18. století však stále více do popředí vystupovaly problémy spojené s vágností pojmů užívaných zakladateli matematické analýzy. Tyto problémy narostly posléze natolik, že se někdy o tomto stavu hovoří jako o **2. krizi matematiky**.

Tato krize byla překonána až v 19. století, kdy BOLZANO a CAUCHY zahájili období tzv. *zpřesňování matematické analýzy*, které posléze dovršil WEIERSTRASS dobudováním tak dobře známého „ε-δ“ jazyka současné analýzy.

Klíčové bylo v této souvislosti především zavedení pojmu **limity**, spojené se jménem Cauchyho (kolem r. 1820).

V intencích našeho tématu se však věnujme především vývoji pojmu **integrál**. Tradice 18. století, podle níž integrování je inverzní operací k derivování, přežívala i do prvních desetiletí 19. století. Bylo známo, že souvislost mezi derivací a integrálem udává tzv. základní věta kalkulu

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(kde F' = f). Do jisté míry však tento vztah byl jen zavedením symbolu na levé straně, i když povaha integrálu jako „jisté limity integrálních součtů“ byla intuitivně dobře chápána od dob Leibnizových a vlastně byla základem infinitesimálních úvah o problému kvadratury.

Teprve okolo roku 1820 se explicitně objevuje součtová definice integrálu u Cauchyho. Pro funkci f spojitou na < a, b > uvažoval dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a přiřadil mu součet

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \ .$$

Dokázal, že tyto součty mají limitu, pokud norma dělení konverguje k nule. Zde není obtížné odhalit to, že Cauchy na základě svých znalostí upřesňoval představy o tom, jak je třeba obsah obrazce chápat jako součet nekonečného počtu nekonečně malých veličin. V tomto důkazu Cauchy vlastně využíval stejnoměrnou spojitost funkce *f*, tj. pojem, který vykrystalizoval daleko později. Cauchy uvedl všechny základní vlastnosti takto definovaného integrálu: linearitu, závislost na integračním oboru i větu o střední hodnotě. Dále dokázal, že funkce

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

je primitivní funkcí k *f* a ukázal, že rovnost

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

platí za předpokladu spojitosti *f'*. (Zavedl také pojem hlavní hodnoty integrálu, aby zahrnul případy izolovaných singularit.)

Vcelku lze konstatovat, že **Cauchy završil teorii integrálu pro spojité funkce jedné proměnné**. Jeho snaha po zpřesňování matematické analýzy vedla např. k tomu, že pojmy dosud chápané pouze intuitivně, jako např. délka, obsah, objem, povrch definoval právě pomocí integrálů, které pro výpočet běžně sloužily. Tak např. délku oblouku křivky daného rovnicí y=f(x) na <a, b> definoval jako

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \quad .$$

(Ovšem u Cauchyho taková definice předpokládala spojitost f'!) Problém, jak zmíněné geometrické pojmy definovat obecným a přirozeným způsobem, bez zbytečných omezujících předpokladů, čekal na uspokojivé řešení vlastně až do 20. století.

Další významný pokrok v teorii integrálu znamenala RIEMANNOVA práce z r. 1854, kterou publikoval v r. 1867. Pro její zásadní důležitost uveďme její podstatnou část.

B. RIEMANN

O možnosti vyjádřit nějakou funkci trigonometrickou řadou

Nejistota, která stále vládne v řadě zásadních otázek teorie určitého integrálu, nás nutí ustanovit několik poznatků o určitém integrálu a rozsahu jeho platnosti.

Nejprve: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)\,dx$?

Abychom to stanovili, vezmeme posloupnost hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ležící mezi *a* a *b* uspořádaných podle velikosti a označme pro stručnost $x_1 - a$ symbolem Δ_1, $x_2 - a$ symbolem $\Delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ symbolem Δ_n a označíme ε_i vlastní kladné zlomky. Potom hodnota součtu

$$S = \Delta_1 \cdot f(a + \varepsilon_1 \Delta_1) + \Delta_2 \cdot f(x_1 + \varepsilon_2 \Delta_2) + \Delta_3 \cdot f(x_2 + \varepsilon_3 \Delta_3) + \cdots + \Delta_n \cdot f(x_{m-1} + \varepsilon_n \Delta_n)$$

bude záviset na volbě intervalů Δ_i a veličin ε_i. Jestliže má tu vlastnost, že se blíží k jisté pevné limitě *A*, pokud se všechna Δ_i stávají nekonečně malá, ať jsou Δ_i a ε_i jakkoli zvolena, potom se *A* nazývá $\int_a^b f(x)dx$.

Jestliže tuto vlastnost nemá, potom $\int_a^b f(x)dx$ postrádá smysl.

…

Za druhé určeme rozsah platnosti tohoto pojmu a ptejme se: ve kterých případech je funkce integrovatelná a ve kterých není?

Nejprve … předpokládejme, že součet konverguje, když se všechna Δ_i stávají nekonečně malými. Pak označme D_1 největší variaci funkce mezi *a* a x_1, tj. rozdíl její největší a nejmenší hodnoty v tomto intervalu, symbolem D_2 největší variaci mezi x_1 a x_2, … , a D_n největší variaci mezi x_{n-1} a *b*; potom

$$\Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \cdots + \Delta_n D_n$$

se musí stát nekonečně malé s veličinami Δ_i. Dále předpokládejme, že pokud všechna Δ_i zůstávají menší než *d*, je největší hodnota, kterou tento součet může nabýt, rovna Δ; Δ pak bude neklesající funkcí *d,* která se s touto hodnotou blíží k nule. Jestliže nyní celková velikost intervalů, v nichž zmíněné variace jsou větší než σ, je rovna *s*, pak příspěvek tohoto intervalu k součtu $\Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \cdots + \Delta_n D_n$ bude zřejmě alespoň σ *s*. Proto máme

$$\sigma \cdot s \leq \Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \cdots \Delta_n D_n \leq \Delta ,$$

tudíž $s \leq \frac{\Delta}{\sigma}$. Při zadaném σ může být vždy $\frac{\Delta}{\sigma}$ učiněno libovolně malé vhodnou volbou *d*; totéž proto platí pro *s* a odtud tudíž plyne:

K tomu, aby součet S konvergoval, když se všechna Δ_i blíží k nule, je nutné, kromě omezenosti funkce f(x), aby celková velikost intervalů, v nichž variace jsou větší než jisté libovolně zadané σ, mohla být učiněna libovolně malá vhodnou volbou d.

Toto platí také obráceně: *Jestliže funkce f(x) je omezená a jestliže se s nekonečným poklesem všech veličin Δ_i celková velikost s intervalů, v nichž variace funkce převyšuje jistou zadanou veličinu σ, blíží k nule … , potom součet S konverguje, když se všechny Δ_i stávají nekonečně malé.*

Ty intervaly, v nichž variace převyšuje *σ*, přispívají totiž do sumy $\Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \cdots + \Delta_n D_n$ hodnotou, která je menší než součin *s* a maximum variace funkce mezi *a* a *b*, což je konečné (podle předpokladu); ostatní intervaly přispívají hodnotou menší než $\sigma \cdot (b-a)$. Zřejmě lze nyní σ nejprve vzít libovolně malé a potom lze vždy určit velikost intervalů (podle předpokladu) tak, že *x* se stává libovolně malé, čímž se také součet $\Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \cdots + \Delta_n D_n$ stává libovolně malý, a v důsledku toho lze sevřít součet *S* mezi libovolně blízké meze.

Našli jsme tedy podmínky, které jsou nutné a postačující ke konvergenci *S*, pokud se blíží Δ_i k nule, takže lze mluvit o integrálu funkce *f*(*x*) mezi *a* a *b* v ostrém smyslu.

* * *

Jak tedy vidíme, ještě ani Riemann nepracoval s dnes běžnými složkami tzv. „Reimannova“ integrálu, jako jsou dobře známé *horní* a *dolní* součty, respektive *horní* a *dolní* integrál. Jeho cílem bylo charakterizovat ty funkce, pro něž lze integrál definovat pomocí součtů, což se mu plně zdařilo.

Dnešní přístup k Riemannovu integrálu vybudovali v letech 1875-80 G. DARBOUX, V. VOLTERRA a G. PEANO. Dnes běžné označení pro horní a dolní integrál zavedl v r. 1881 Volterra.

Tzv. *Jordanovou míru*, pomocí níž je definován Reimannův integrál funkcí více proměnných, vybudoval JORDAN v r. 1892.

Riemannův integrál byl ve 20. století různými způsoby zobecněn a modifikován. Snad nejdůležitější zobecnění vybudoval v r. 1902 H. LEBESGUE. Lebesgueův integrál a Lebesgueova míra, kterou definoval v r. 1904, učinily mnohé problémy integrálního počtu průzračnějšími. Jejich podrobnější popis však přesahuje rámec tohoto textu. Uveďme proto pouze v závěru, jak lze pomocí Lebesgueovy míry elegantně popsat Riemannovu podmínku toho, aby funkce byla integrace schopna.

Běžně uváděná nutná a dostatečná podmínka, že *f je na <a,b> integrovatelná (riemannovsky) právě tehdy, když se horní a dolní integrál vzájemně rovnají*, totiž víceméně zastírá podstatu věci: aby byla funkce integrace schopna, nesmí být „příliš nespojitá“. Tuto vágní formulaci lze zpřesnit následovně:

Omezená funkce na intervalu <a, b> je na tomto intervalu riemannovsky integrace schopna právě tehdy, když množina bodů nespojitosti funkce f na <a, b> má Lebesgueovu míru 0.

Množina $A \subseteq \mathbf{R}$ má přitom Lebesgueovu míru 0, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje **nejvýše spočetný** systém intervalů I_j tak, že $A \subseteq \bigcup I_j$ a součet délek všech intervalů I_j je menší než ε.