LATINSKÉ ČTVERCE

17. 10. 1776 předložil LEONHARD EULER (1707 - 1783) petrohradské akademii proslulou *úlohu o 36 důstojnících*:

Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodností ze 6 různých pluků do čtverce tak, aby v každé řadě a v každém zástupu byli důstojníci všech hodností a všech pluků!

Jak Euler na tuto úlohu přišel a proč ji zformuloval právě pro 36 důstojníků?

Definice latinského čtverce.

Věta: *Pro každé přirozené n existuje latinský čtverec řádu n.*

Příklad:

a)

1	2	3		n
2	3	4 ....n		1
3	4	4 1		2
.				
.				
n	1	2		n-1

b) Latinským čtvercem je například každá tabulka násobení libovolné konečné grupy.

DEFINICE: *Latinské čtverce* (a_{ij}), (b_{ij}) *se nazývají ortogonální, jestliže se v matici* (a_{ij}, b_{ij}) *vyskytuje každý prvek příslušného kartézského součinu právě jednou.*

Příklad:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 12 & 23 & 31 \\ 21 & 32 & 13 \\ 33 & 11 & 22 \end{matrix}$$

Eulerovu úlohu lze tedy přeformulovat následovně:

Najděte ortogonální latinské čtverce 6. řádu!

PROBLÉM: Existují ortogonální latinské čtverce pro každé $n > 1$?

Příklad: Pro $n = 2$ neexistují.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{matrix}$$

Euler pravděpodobně znal úlohu na ortogonální latinské čtverce 4. řádu, kterou uveřejnil Jacques OZANAM (1640 - 1717) r. 1694 v dvoudílné knize *Recréations mathématiques.*

Euler odvodil, že existují ortogonální latinské čtverce pro každé *liché* n. Již Ozanam přitom ukázal, že existují také ortogonální čtverce 4. řádu.

EULEROVA HYPOTÉZA: Ortogonální čtverce neexistují pro žádné $n = 4k + 2$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (tj. $n = 2, 6, 10, 14, \dots$).

V r. 1900 dokázal francouzský celní inspektor Gaston TARRY (1843 - 1913), že opravdu neexistují ortogonální čtverce 6. řádu. Provedl to porovnáním všech možností.

PROBLÉM: Kolik je všech latinských čtverců řádu n?

Dolní odhad **tohoto čísla překvapivě udává** *teorie bipartitních grafů.*

Bipartitní graf, úplný bipartitní graf, párování v bipartitním grafu (z každého uzlu vychází nejvýše jedna hrana), úplné párování (z každého uzlu vychází právě jedna hrana).

Typická úloha na párování v bipartitních grafech: Hallova věta o svatbách - Ph. Hall (1904 - 1982) v r. 1935.

Barvení hran v grafu, hranové chromatické číslo.
Je zřejmé, že hranové chromatické číslo úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ je n .
Je-li dán takový graf s množinou uzlů $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množinou hran *H*, zvolme obarvení hran

$$f : H \qquad \{1,2, \dots , n\}.$$

Definujeme-li nyní matici $(a_{i,j})$ typu n/n vztahem

$$a_{i,j} = f(u_i, v_j)$$

je tato matice evidentně latinským čtvercem.

Příklad:

Obarvení hran v $K_{n,n}$ n barvami však určuje n různých úplných párování (barva = párování). Počet těchto úplných párování v $K_{n,n}$ však lze určit algebraicky; udává ho *permanent matice sousednosti.*

Odtud celkem plyne

VĚTA: *Latinských čtverců řádu n je minimálně*

$$\mathbf{n!\ .\ (n-1)!\ .\ (n-2)!\ \ldots\ 1!}$$

Pro n = 6 je tedy latinských čtverců nejméně

$$\mathbf{6!\ 5!\ 4!\ 3!\ 2!\ 1! = 24\ 883\ 200}$$

E. T. PARKER, Proc. AMS 10 (1959), 946 -949

Konstrukce ortogonálních latinských čtverců řádu 22.

Definitivní odpověď v r. 1960:

R. C. BOSE - S. S. SHRIKHANDE, Trans. AMS 95 (1960), 191 - 209

Ortogonální latinské čtverce existují pro každé přirozené n > 2 kromě n = 6 .

Přitom je evidentní, že každá množina po dvou ortogonálních latinských čtverců řádu n má nejvýše n-1 prvků.

Příklad - ortogonální čtverce řádu 10

00	49	17	96	28	83	75	61	52	34
76	11	59	27	90	38	84	02	63	45
85	70	22	69	37	91	48	13	04	56
58	86	71	33	09	47	92	24	15	60
93	68	80	72	44	19	57	35	26	01
67	94	08	81	73	55	29	46	30	12
39	07	95	18	82	74	66	50	41	23
21	32	43	54	65	06	10	77	88	99
42	53	64	05	16	20	31	89	97	78
14	25	36	40	51	62	03	98	79	87

Jacob STEINER (1796 - 1863) zformuloval v r. 1853 problém trojic:

Pro která přirozená n lze z daných objektů vytvořit trojice tak, aby se každé dva prvky vyskytly společně právě v jedné trojici?

V r. 1859 dokázal M. RIESS, že vcelku evidentní nutná podmínka je i dostatečná:

Věta: Na n-prvkové množině existuje systém Steinerových trojic právě tehdy, když $n = 6k + 1$ nebo $n = 6k + 3$, $n \geq 3$, k celé. V tom případě je těchto trojic $n(n-1)/6$ a každý prvek se vyskytuje v $(n-1)/2$ trojicích.

Příklad:

n = 3	**:**	**123**			
n = 7	**:**	**123**	**167**	**257**	**356**
		145	**246**	**347**	
n = 9	**:**	**123**	**179**	**278**	**369**
		145	**249**	**348**	**467**
		168	**256**	**357**	**589**

X	X	X				
X			X	X		
X					X	X
	X		X		X	
	X			X		X
		X	X			X
		X		X	X	

Nejjednodušší *matro-*
id

Gino FANO (1871-1952)

První úlohu vedoucí na Steinerovy trojice však uveřejnil anglický kněz a amatérský matematik Thomas Penyngton KIRKMAN (1806 - 1895) v *Lady's and Gentleman' Diary* r. 1844:

Patnáct školaček chodí denně na procházku seřazeno do pěti trojic. Lze je řadit do trojic tak, aby každá s každou šla během sedmi po sobě jdoucích dnů ve trojici právě jednou?

Jde evidentně o systém Steinerových trojic s dodatečnou podmínkou: trojice rozdělit na 7 tříd po pěti tak, aby každý prvek byl v každé třídě právě jednou.

Řešení:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

1	4	7
2	5	10
6	11	14
9	12	15
3	8	13

1	5	13
2	4	12
6	7	15
8	10	14
3	9	11

1	6	8
2	11	13
4	10	15
5	9	14
3	7	12

1	9	10
2	7	14
3	5	15
4	8	11
6	12	13

1	11	15
2	6	9
3	4	14
5	8	12
7	10	13

1	12	14
2	8	15
3	6	10
4	9	13
5	7	11

V r. 1850 zobecnil tento problém Arthur CAYLEY (1821 - 1895) na lib. přirozené n (v příslušném přeformulování). Dodnes to zůstalo nevyřešeno, ačkoliv na problému intenzivně pracoval například James Joseph SYLVESTER (1814 - 1897).

Definice: Buďte v,b,k,r,λ přirozená čísla, A buď konečná množina s v prvky. Systém podmnožin

$$X_1, X_2, \dots, X_b$$

se nazývá *blokové schéma typu (v,b,k,r,λ)* **na množině A , jestliže všechny množiny X_i, nazývané** *bloky* **, mají k prvků, každý prvek $a \in A$ je prvkem právě r bloků a každé dva prvky leží současně v právě λ blocích.**

Steinerovy trojice jsou tedy bloková schémata typu (n,b,3,r,1) .

Definice: Buď A konečná neprázdná množina, $\mathfrak{R}$ nějaký systém jejích neprázdných podmnožin. Prvky množiny A v dalším nazýváme *body*, **prvky množiny $\mathfrak{R}$** *přímky.* **Dvojici (A, $\mathfrak{R}$) nazveme** *konečnou afinní rovinou*, **jestliže platí:**

I. Každé dva různé body leží na právě jedné přímce.
II. Ke každému bodu $x \in A$ a každé přímce p , $x \notin p$ existuje právě jedna přímka q taková, že $x \in q$, $p \cap q = O$.
III. Existují tři navzájem různé body, které neleží na jedné přímce.

Příklad konečné roviny.

Řád konečné roviny, rovnoběžky, směr.

Věta: Konečná afinní rovina řádu n má n^2 bodů a $n^2 + n$ přímek. Na každé přímce leží n bodů a každým bodem prochází n + 1 přímek. Všechny přímky lze rozdělit do n+1 směrů a každý směr obsahuje n rovnoběžek.

První směr	I	1	2	3	4
	II	5	7	6	8
	III	10	11	9	12
	IV	15	14	16	13

Druhý směr	V	13	1	5	9
	VI	14	10	2	6
	VII	11	15	7	3
	VIII	4	8	12	16

Třetí směr	IX	6	16	1	11
	X	12	5	15	2
	XI	8	9	3	14
	XII	13	4	10	7

Čtvrtý směr	XIII	7	12	14	1
	XIV	2	13	8	11
	XV	16	3	10	5
	XVI	9	6	4	15

Pátý směr	XVII	1	8	15	10
	XVIII	9	2	7	16
	XIX	3	12	13	6
	XX	5	14	11	4

Věta: Konečná afinní rovina řádu n 3 existuje právě tehdy, když existuje n-1 latinských čtverců n-tého řádu, z nichž každé dva jsou navzájem ortogonální.

Důsledek: Neexistuje konečná rovina 6. řádu.

Idea důkazu věty: Seřaďme 16 bodů konečné roviny 4. řádu do tabulky

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Řádky a sloupce jsou zřejmě přímky 1. a 2. směru. Nyní vezměme přímky 3. směru a ve výše uvedené tabulce nahraďme číslem 1 body přímky IX, tj. body 1, 6, 11 a 16, číslem 2 body přímky X atd. Dostaneme tak matici

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1.

Zákonitě jsme přitom obdrželi latinský čtverec.
Nyní sestrojíme analogicky latinské čtverce pomocí 4. a 5. směru. Dostaneme

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Takto sestrojené čtverce jsou zákonitě ortogonální. Konstrukci lze přitom obrátit.

Konečných afinních rovin existuje nekonečně mnoho,

Věta: Je-li přirozené číslo n mocninou nějakého prvočísla, existuje konečná rovina n-tého řádu.

Věta: (P. H. Bruck - H. J. Ryser 1949) Nechť přirozené číslo n není součtem čtverců dvou přirozených čísel a nechť n=1 (mod 4) nebo n=2 (mod 4). Pak neexistuje konečná rovina řádu n .

10! 9! 8! 7! 6! 5! 4! 3! 2! 1! = 6,658 606 583 . 10^{27} .

MAGICKÉ ČTVERCE

Je-li utvořen z čísel 1, 2, ... , n^2 , je součet v každém řádku a sloupci roven číslu $n(n^2 + 1)/2$.

JANG HUI (13. stol.) - konstrukce magických čtverců 3. - 10. řádu. Například tzv. *Veliký Lo-šu:*
magický čtverec *Lo-šu*, zvaný též *Saturn*, je následující čtverec, známý již ve starověku

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Očíslujeme-li řádky i sloupce čísly 0, 1 a 2 a označíme-li L(i,j) číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci, takže například L(1,2) = 7, jsou při analogickém očíslování následujícího Velkého Lo-šu prvky G(i,j) vytvořeny podle pravidla:

$$G(3a + b, 3c + d) = L(a,c) + 9.[L(b,d) - 1],$$

a,b,c,d = 0, 1, 2 .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	31	76	13	36	81	18	29	74	11
1	22	40	58	27	45	63	20	38	56
2	67	4	49	72	9	54	65	2	47
3	30	75	12	32	77	14	34	79	16
4	21	39	57	23	41	59	25	43	61
5	66	3	48	68	5	50	70	7	52
6	35	80	17	28	73	10	33	78	15
7	26	44	62	19	37	55	24	42	60
8	71	8	53	64	1	46	69	6	51

Např.

$$G(7,2) = L(2,0) + 9[L(1,2) - 1] = 8 + 9.(7 - 1) = 62$$