# 2. Jak jsou prvočísla rozmístěna v N?

Vraťme se nyní k úvahám o množině všech prvočísel, která -- jak jsme si již připomenuli -- je rovněž nekonečná. Za **každým** přirozeným číslem tedy následuje nekonečně mnoho prvočísel. Jak však jsou prvočísla v množině **N** rozmístěna?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 |
| 72 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 71 | 42 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 51 |
| 70 | 41 | 20 | 7 | 8 | 9 | 10 | 27 | 52 |
| 69 | 40 | 19 | 6 | 1 | 2 | 11 | 28 | 53 |
| 68 | 39 | 18 | 5 | 4 | 3 | 12 | 29 | 54 |
| 67 | 38 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 30 | 55 |
| 66 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 56 |
| 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 |

Některé hypotézy je obtížné byť jen zformulovat. Na ukázku uvádíme zajímavost, kterou odhalil americký matematik polského původu STANISLAW MARCIN ULAM (1909 -- 1984) při řešení úloh na šachovnici. Když začneme do polí (nekonečné) šachovnice zapisovat postupně „do spirály" přirozená čísla, začnou se prvočísla zajímavým způsobem skládat do různě dlouhých „úhlopříček" vytvářeného schématu. Prohlédneme-li si na hořejším obrázku uvedený začátek této „Ulamovy spirály" (prvočísla jsou zvýrazněna), je zřejmé, že prvočísla zde nejsou rozložena nahodile. Nějaká zákonitost však zatím popsána není.

Vraťme se však k některým klasickým výsledkům. Zajímavou hypotézu vyslovili nezávisle na sobě v roce 1783 LEONHARD EULER (1707 -- 1783) a v r. 1785 ADRIAN-MARIE LEGENDRE (1752 -- 1833):

*Jsou-li* $a,b$ *libovolná přirozená nesoudělná čísla, obsahuje aritmetická posloupnost* $a, a+b, a+2b, \ldots, a+nb, \ldots$ *nekonečně mnoho prvočísel.*

LEGENDRE tuto hypotézu dokázal v r. 1808, později se však ukázalo, že jeho důkaz byl chybný. Přesný důkaz podal až v roce 1837 PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 -- 1859). Položme si v této souvislosti opačný úkol: chceme najít úsek aritmetické posloupnosti tvořený výhradně prvočísly. První tři následující příklady lze nalézt vcelku snadno:

3, 5, 7
5, 11, 17, 23, 29
7, 37, 67, 7, 27, 57

Podstatně komplikovanější je však nalezení delších úseků aritmetických posloupností. Nejdelší dodnes známý příklad je tvořen 18 prvočísly:

$$107\,928\,278\,317 + k \,.\, 9\,922\,782\,870, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 17.$$

Jen pro ilustraci výsledků, které bylo možno zjistit jen s nasazením výkonné výpočetní techniky, uveďme ještě jeden výsledek o aritmetických posloupnostech přirozených čísel. Když si prohlédneme uvedené aritmetické posloupnosti, vidíme, že -- až na první velmi jednoduchý příklad -- jsou sice uvedené úseky aritmetických posloupností tvořeny prvočísly, avšak tato prvočísla nenásledují bezprostředně po sobě; některá jsou jednoduše vynechána (například ve druhé jsou vynechána prvočísla 7, 13 a 19. Nabízí se tedy otázka, jaká je nejdelší známá aritmetická posloupnost po sobě jdoucích prvočísel?

Harvey Dubner a Harry Nelson nalezli 29. 8. 1995 takovou posloupnost tvořenou 7 prvočísly:

1 089 533 431 247 059 310 875 780 378 922 957 732 908 036 492 993 138 195 385 213 105 561 742 150 447 308 967 213 141 717 486 151 + k . 210, k= 0,1,...,6.

Dne 7. 11. 1997 byla nalezena posloupnost osmi takových čísel a v r. 1998 nalezl Manfred Toplic z Klagenfurtu v Rakousku dokonce posloupnost o 9 a posléze i 10 členech. Nejdelší dnes známá aritmetická posloupnost po sobě jdoucích prvočísel je tedy tvořena čísly

100 996 972 469 714 247 637 786 655 587 969 840 329 509 324 689 190 041 803 603 417 758 904 341 703 348 882 159 067 729 719 + k × 210, k = 0, 1, … , 9.

Snad ještě zajímavější je však problém, jak dlouhý může být v **N** úsek bez prvočísel? Při pozorné prohlídce tabulky prvočísel bychom takovou „pauzu“ například mohli nalézt mezi čísly 1 671 800 a 1 671 900. Existují však v množině prvočísel mezery podstatně delší?

Do značné míry je překvapující zjištění, že v množině přirozených čísel existují bez prvočísel **libovolně dlouhé** úseky.

Důkaz tohoto překvapujícího zjištění je navíc zcela banální. Zvolíme-li totiž libovolné přirozené $n$, neleží v úseku

$$(n+1)! + 2,\ (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1$$

zcela jistě žádné prvočíslo, protože číslo $(n+1)!+2$ je dělitelné 2, číslo $(n+1)!+3$ je dělitelné 3 atd. (Připomeňme si v této souvislosti, jak obrovská mohou být přirozená čísla a znovu si uvědomme, že **jakkoliv velké** přirozené číslo zvolíme, existuje v **N** úsek této délky bez prvočísel, ačkoliv je jich nekonečně mnoho!)