Bakalářské a magisterské studijní programy
na Ústavu matematiky a statistiky Masarykovy univerzity

Rozvaha o struktuře a obsahu studijních programů garantovaných ústavem, vycházející ze zásad stanovených zákonem, Národním akreditačním úřadem a vedením univerzity, projednaná vedením ústavu dne 24. května 2017 a Radou ústavu dne 22. září 2017, s doplněním vycházejícím ze závěrů pracovní skupiny v listopadu 2017.

1. Obecné úvahy

1.1. Pro bakalářské studium budeme nabízet studijní program *Matematika* jako tzv. program se specializacemi. Kromě toho budeme nabízet ucelené studijní plány pro tzv. *sdružená studia*, tj. studijní plány na úrovních *maior* i *minor* víceméně svobodně volitelné v kombinacích napříč MU a *doporučené (resp. provozně přímo podporované) pro několik takových kombinací.*

1.2. Pro případný samostatný profesně zaměřený matematický program jsme zatím neidentifikovali dostatečně atraktivní příležitosti, ústav ale bude vyhledávat možnosti se na takových programech na Masarykově univerzitě podílet. Tímto směrem se ale v aktuální rozvaze nebudeme pouštět.

1.3. V magisterském studiu budeme nabízet dva studijní programy *Matematika* (Pure Mathematics) a *Aplikovaná matematika* (Applied Mathematics). Ve druhém případě půjde o studijní program se specializacemi. V případě programu Matematika také zavedeme různá zaměření studentů, půjde ale o volnější formu specializací. Program Aplikovaná matematika bude zahrnovat sdružená studia s minorem nebo maiorem (v obdobě k současnému oboru „matematika s informatikou“ nebo „matematika – ekonomie“), přímá dohoda o spolupráci je s Ekonomicko-správní fakultou MU.

1.4. V diskusi matematických studijních programů budeme sledovat *tři různé úrovně* z hlediska struktury nabídky a *tři různé pohledy* z hlediska obsahu. Půjde nám o tyto úrovně:

- specializace programu (resp. doporučené kombinace plánů maior či minor bloků dvou různých programů),
- odražení jednotlivých oblastí matematiky ve studijních plánech,
- jednotlivé vyučované předměty studia.

1.5. Na těchto úrovních chceme deklarovat, do jaké míry se budeme soustředit na pohledy

- *celkové koncepce a výstavby* teorie a vyjasnění souvislostí k dalším oblastem matematiky,
- osvojení si *rutiny* d*ůkazů a tvorby pojmů*,
- osvojení si *rutiny využívání* dotčených matematických pojmů a nástrojů (napříč oblastmi matematiky a zejména mimo matematiku).

1.6. Oblasti matematiky jsou v kontextu studijních programů dány závazným seznamem v definici vzdělávací oblasti Matematika. Jsou to (převzato doslovně z Nařízení vlády č. 275/2016 Sb., ze dne 24. srpna 2016, o oblastech vzdělávání ve vysokém školství):

- algebra a teorie čísel,
- geometrie a topologie,
- diskrétní matematika a matematická logika,
- matematická analýza,
- numerická matematika,
- matematické modelování,
- pravděpodobnost a statistika,
- finanční a pojistná matematika,
- aplikovaná matematika.

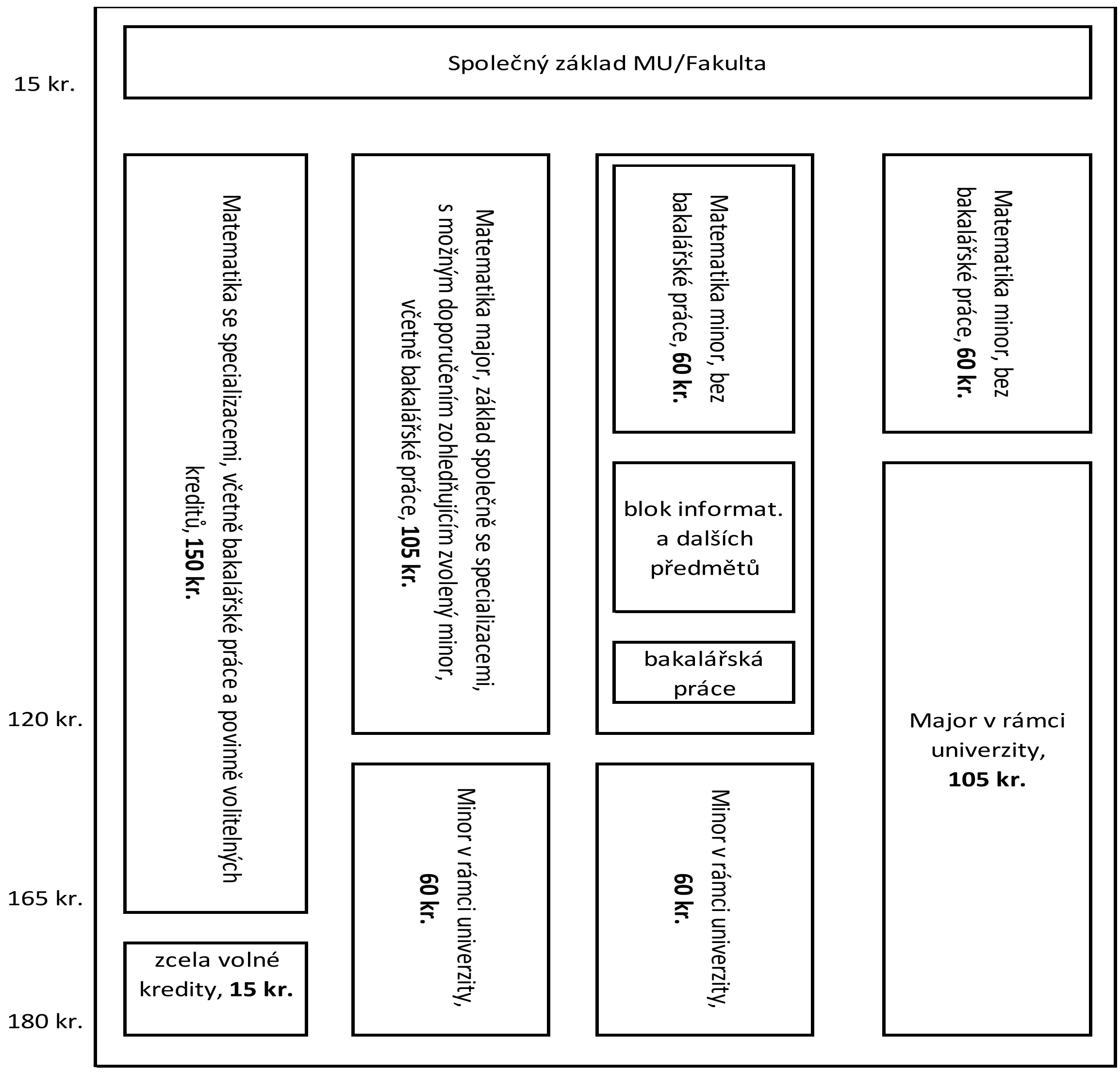
1.7. Z pohledu studijních programů je třeba toto rozdělení rozumně interpretovat, protože je na první pohled zřejmé, že se takto nazvané oblasti překrývají. Pro naše potřeby budeme zejména považovat poslední jmenovanou oblast „aplikovaná matematika“ za implicitně pokrytou v ostatních, a to tím způsobem, že některé části studijních plánů budou brát zřetel na přímé využívání budovaných teorií a nástrojů. Na úrovni programů bakalářských bychom měli poskytnout alespoň základní představu o všech oblastech pro všechny specializace.
1.8. Je třeba také vidět, že velmi často jsou pojmy a s nimi související dovednosti a intuice jednotlivých výše uvedených oblastí vykládány a používány hned v počátečních elementárních fázích budování oblastí jiných. Markantní je to např. na typických úvodních blocích přednášek lineární algebry a geometrie a ještě více v diferenciálním a integrálním počtu, kde se nutně setkáváme s postupy algebry, geometrie, topologie, diskrétní matematiky i logiky.
1.9. Ústav matematiky a statistiky by měl dále posílit své aktivity v popularizaci studia matematiky, včetně aktivní práce s talenty, organizace cílených zájmových akcí, expozice matematických témat v univerzitě třetího věku, snahy o prezentace v médiích, sociálních sítích a na internetu apod. Obecně je třeba popularizaci možností studia u nás profesionalizovat a velmi výrazně zlepšit informovanost o našich absolventech a spolupráci s nimi.
1.10. Přijímání do studia na magisterské úrovni by mělo být flexibilní, bez nadbytečných vazeb na naše vlastní bakalářské programy. Chceme podporovat příchod studentů po absolvování jiných škol, včetně zahraničních.

2. Struktura bakalářských programů a společné bloky kurzů

2.1. S ohledem na záměry Masarykovy univerzity a předběžné diskuse s partnery uvnitř univerzity (zejména Ekonomicko-správní fakulta MU (dále ESF), Fakulta informatiky MU, některé obory uvnitř Přírodovědecké fakulty MU), navrhujeme schéma výstavby programů znázorněné na obrázku níže.
2.2. V rámci bakalářského programu Matematika navrhujeme následující specializace:

- *Finanční a pojistná matematika* (Financial and Insurance Mathematics)
- *Modelování a výpočty* (Computational Mathematics)
- *Statistika a analýza dat* (Statistics and Data Analysis)
- *Obecná matematika* (Pure Mathematics).

2.3. Pro sdružená studia budeme mít navrženy *dvě možnosti* naplnění požadavků bloku typu *maior*. Jednak půjde o předměty a povinnosti převzaté z nabídky pro základní program se specializacemi, včetně bakalářské práce, bude ale také k dispozici kompaktní blok (patrně 4 semestry 4/2 po 8 kr.), který ekvivalentně nahradí podstatnou část základních přednášek v programu se specializacemi (zejména bloky analýzy, lineární algebry a geometrie, diskrétní matematiky a algebry). Doplněním o další přednášky (např. statistika, numerika – indikaci, o které přednášky může jít, lze vidět v tabulkách v příloze, a to ve sloupci minor) tak vzniknou dva *celistvé bloky typu minor,* s názvy *Matematika* a *Statistika.* Zároveň bude možno zformovat alternativní blok typu maior se zahrnutím bloku informatických předmětů (podobný současnému oboru „Modelování a výpočty“, který chceme obdobně nabízet pod názvem *„Matematika v aplikacích“* se zahrnutím minorů jiných oborů, zejména ekonomie a matematické biologie).



2.4. Nabídka bloků maior a minor z předchozího odstavce je dohodnuta s ESF jako cesta ke kombinacím *Matematika-Ekonomie* a jsme dohodnuti, že budeme tyto kombinace nabízet zcela symetricky, tj. kromě verze s maiorem v Matematice bude druhou možností využití standardních minorů Matematiky nebo Statistiky k maioru v Ekonomii, tak jak jej nabízí na ESF. Strategie MU pravděpodobně umožní relativně snadné překlopení studentů během prvních let studia, pokud změní názor na svoji volbu části maior a zaměření bakalářské práce. Jednotlivé kurzy takto strukturovaného bloku minor budou patrně také vhodné pro interdisciplinární program Matematická biologie.
2.5. Rozvaha v kontextu odstavců 1.4 – 1.6 na úrovni specializací studia je shrnuta v následující tabulce. Řádky zde odpovídají oblastem matematiky, sloupce specializacím studia, resp. minoru, a písmena K, D, A představují po řadě celkovou koncepci, důkazovou rutinu a rutinu v aplikacích. Číselné hodnota 0 pak naznačuje nevelkou důležitost, zatímco hodnota 2 poukazuje na velkou důležitost příslušného pohledu.

Obecné schéma	**Finanč. a pojist. matematika**			**Modelování a výpočty**			**Statistika a analýza dat**			**Obecná matematika**			**Minor Matematika**		
	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Algebra a teorie čísel	1	0	0	1	0	2	1	0	1	2	2	1	1	1	1
Geometrie a topologie	1	0	1	1	0	1	1	0	1	2	2	1	1	1	1
Diskrétní matem. a matem. logika	1	1	0	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1
Matematická analýza	1	1	1	1	0	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1
Numerická matematika	1	0	1	1	1	2	2	0	2	2	1	1	1	1	1
Matematické modelování	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	0	0	1	1	0
Pravděpodobnost a matem. statistika	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
Finanční a pojistná matematika	2	1	2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0

2.6. Pro jednotlivé oblasti matematiky bude třeba navrhnout vhodné základní kurzy a jejich zahrnutí do povinných/doporučených studijních plánů jednotlivých specializací či minoru. Zároveň bude vhodné pro tyto kurzy zvážit priority v obdobě k obecné tabulce z 2.5. Tomuto problému se podrobně věnovala pracovní skupina na ÚMS v jarních měsících 2017.
2.7. Na základě intenzivních diskusí byly v pracovní skupině sestaveny možné studijní plány. Tento materiál také posloužil *jako iniciační rozvaha* proveditelnosti celkové koncepce a byl plně převzatý do formálních akreditačních podkladů. Ve čtvrté části tohoto dokumentu jsou v tabulkách uvedeny výše diskutované priority ve struktuře předmětů, jak byly diskutovány jarní pracovní skupinou. Jde přitom o pokus specifikovat optimální profilování daného předmětu v kontextu jeho zařazení do celkové struktury a to z úzkého pohledu konkrétní specializace. Výsledkem má být srozumitelný podklad pro budoucí diskuse o kompromisním obsahu jednotlivých kurzů a určitě přitom nepůjde o vytvoření pěti různých paralelně realizovaných verzí. Je ale možné v některých případech uvažovat o verzích dvou a zároveň mohou být z toho pohledu vyprofilovány vhodné doplňující (volitelné) semináře či jiné aktivity, které případné odchylky od představ pro jednotlivé specializace zkorigují.
2.8. Z výstupu práce pracovní skupiny (viz přehledné tabulky níže) je zřetelné, že v kontextu základních bloků kurzů společných pro všechny specializace velmi výrazně dominuje oblast matematické analýzy (návrh obsahuje 14 semestrálních hodin přednášek analýzy, oproti 4 u statistiky nebo lineární algebry, 2 u algebry nebo diskrétní matematiky atd.). To je pozitivní v tom smyslu, že diferenciální a integrální počet, stejně jako další pokročilejší oblasti matematické analýzy, jsou velmi

přirozenou platformou pro pochopení základních pojmů a technik mnoha oblastí matematiky, viz komentář v odstavci 1.7 výše.

2.9. Z tabulek je také vidět, že velmi výrazná skupina studentů nebude navštěvovat pokročilejší kurzy v jednotlivých oblastech vůbec, čemuž je třeba pečlivě přizpůsobit obsah kurzů základních. Toto konstatování se zcela stejně dotýká všech ostatních základních přednášek povinných pro všechny specializace, tj. zejména analýzy, algebry, lineární algebry a geometrie, diskrétní matematiky.

2.10. V kontextu studijních plánů typu minor/maior může být výhodnější jiná celková struktura, protože tam nebude k dispozici dostatečný celkový rozsah studijního plánu na pokrytí kompletních základních bloků standardního programu. Způsob matematického myšlení, matematický přístup k řešení problémů, jakož i dostupné ilustrace aplikací, lze přitom rychleji rozvinout i prostřednictvím diskrétní matematiky a algebraických metod a role platforem z předcházejících dvou odstavců se může obrátit. Z tohoto pohledu by měl být koncipován alternativní blok základních přednášek pro minor zmíněný v odstavci 2.3.

3. Struktura magisterských programů

3.1. Magisterské studium by mělo být kvalitativně i organizačně výrazně odlišné od studia bakalářského. Klíčovou dovedností by zde měla být schopnost vnímání a aktivního osvojování výsledků z různých oblastí matematiky, zapojování se do praktických projektově orientovaných prací, případně zapojení do aktivní spolupráce ve výzkumu a vývoji nebo v konzultační praxi.
3.2. Zároveň je třeba studenty vychovávat pro jejich budoucí pracovní zařazení na mezinárodním pracovním trhu. Jako samozřejmé se v tomto kontextu jeví zavedení angličtiny jako alternativního jazyka pro výuku i komunikaci, včetně základních povinných přednášek a cvičení.
3.3. Kromě vlastních pracovníků s výraznou mezinárodní zkušeností je vhodné výše uvedených cílů dosahovat výrazným zapojením externích přednášejících a to jak zahraničních výzkumníků navštěvujících ústav, tak odborníků z partnerských institucí. Obojí by se mělo týkat obou magisterských programů.
3.4. Program Matematika. V rámci tohoto programu byly v diskusi zvažovány následující specializace algebra, geometrie, matematická analýza v obdobě k současným oborům. V diskusi převážila alternativa dovolující bohatší strukturaci zaměření studentů, aniž by byly formalizovány při akreditaci programy formou specializace. Chceme tedy realizovat program Matematika jakožto program bez specializací. Zaměření studentů bude dáno jejich volbou diplomové práce a volitelných bloků předmětů, se kterými budou také spojeny volitelné bloky v rámci okruhů otázek ke státnicím.
3.5. Blok společných povinných předmětů bude poskytovat přehled základních matematických teorií, a to jak na úrovni hlubšího vhledu do vybrané užší partie, tak zejména z pohledu širších souvislostí a aplikací, ale také metodiky specifické pro danou oblast. Právě o tento blok předmětů by se měla opírat magisterská úroveň širšího rozhledu absolventů v matematice. Oproti stávajícímu stavu se zde jeví jako velmi žádoucí rozvinout schopnost studentů vnímat matematické výsledky, jejich význam a využití, aniž by nutně prošli všemi detaily jejich důkazů v plné obecnosti.
3.6. Další povinné či povinně volitelné bloky předmětů již budou specifické pro jednotlivá hlavní zaměření a měly by primárně přispět k získání požadovaných schopností pro samostatnou tvůrčí práci v příslušné užší oblasti matematiky, ať už při používání matematických nástrojů nebo jejich dotváření. Klíčovou zde musí být diplomová práce a zejména u vysoce kvalitních prací bychom měli výrazně preferovat jejich vypracování v angličtině.
3.7. Vzhledem k očekávaným nevelkým počtům studentů je vhodné koncipovat celkovou nabídku předmětů pro tento program úsporně, zaměřit se na samotné kvalifikační práce, umožňovat a doporučovat studentům výběr i z přednášek pro aplikovanou matematiku (zejména z jejich společných povinných a povinně volitelných kurzů) nebo informatiku a doplňovat nabídku o specializované (často ad hoc organizované) přednášky nabízené společně magisterským i doktorským studentům.
3.8. Program Aplikovaná matematika. V tomto programu budou nabízeny specializace

- finanční a pojistná matematika (Financial and Insurance Mathematics),
- modelování a výpočty (Computational Mathematics),
- statistika a analýza dat (Statistics and Data Analysis).
- diferenciální rovnice a jejich aplikace (Differential equations and their applications).

Poslední jmenovaná specializace se od předchozích odlišuje větším důrazem na propojení teoretických, numerických i aplikačních aspektů diferenciálních a diferenčních rovnic.
3.9. I v tomto programu bude samozřejmě společný blok povinných předmětů, jehož zaměření by mělo cílit na prakticky užitečné nástroje pro výstavbu, softwarové implementace, či aplikace matematických a statistických modelů.
3.10. Jednotlivé specializace tohoto programu budou mít převážně praktické zaměření, absolventi by měli mít i okamžitě využitelné dovednosti. Podstatnou část kapacity programu bychom měli uvolnit

pro prakticky orientované projekty nebo projektově vedené kurzy s přímou účastí externích spolupracujících osob/subjektů.

3.11. Zároveň musíme cílit i na hlavní přidanou hodnotu absolventů matematických programů – jejich schopnost logického a racionálního přístupu k formulaci a řešení problémů založenou na schopnosti abstraktního myšlení a dovozování věcí, tak jak je vlastní matematickým teoriím.

3.12. V rámci programu Aplikovaná matematika bude také nabízen výše zmíněný blok společných povinných a vhodně zvolených povinně volitelných předmětů jako 40 kr. blok představující minor nabízený zejména ve spolupráci s ESF. Dodáním diplomové práce a dalších našich předmětů bude sloužit také jako maior.

4. Nástin obsahu bakalářských kurzů po jednotlivých oblastech matematiky

V této části uvádíme stručné shrnutí výsledku diskuse pracovní skupiny se zahrnutím pohledů specifikovaných výše, viz např. odstavec 2.7.

4.1. Následující tabulky podávají přehled předmětů, jak je v kontextu jednotlivých specializací bakalářského programu a převážně na základě přednášek již existujících sestavila pracovní skupina v jarních měsících roku 2017. Nafialovělá pole ukazují, že s předmětem se nepočítá ani na úrovni doporučení, u minoru jsou vyznačeny plné varianty, které ale v prvních čtyřech tabulkách mohou být nahrazeny kompaktním blokem zmíněným v odstavci 2.3. Rozdělení předmětů po tabulkách je třeba brát s rezervou, např. lineární algebra by mohla být i v algebře, stochastické modely v modelování apod. Volbu je možné ale také brát jako naznačení akcentu, který by v předmětu měl být obsažen.

Algebra a teorie čísel		**Finanč. a pojist. matematika**			**Modelování a výpočty**			**Statistika a analýza dat**			**Obecná matematika**			**Minor Matematika**		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Algebra I	**2/2**	1	1	1	1	0	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1
Algebra II	**2/2**										2	2	1			
Systémy počítač. algebry	**2/1**				1	0	2	1	0	2						

Geometrie a topologie		**Finanč. a pojist. matematika**			**Modelování a výpočty**			**Statistika a analýza dat**			**Obecná matematika**			**Minor Matematika**		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Lineární algebra a geometrie I-II	**2/2**	1	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2
Lineární algebra a geometrie III	**2/2**										2	2	1			
Topologie	**2/1**										2	1	1			

Diskrétní matematika a matematická logika		**Finanč. a pojist. matematika**			**Modelování a výpočty**			**Statistika a analýza dat**			**Obecná matematika**			**Minor Matematika**		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Diskrétní matematika	**2/2**	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	0	1	1	1
Teorie grafů	**2/1**										1	1	1			
Teorie množin	**2/0**										2	1	1			
Matematická logika	**2/1**										2	1	0			

Matematická analýza		Finanč. a pojist. matematika			Modelování a výpočty			Statistika a analýza dat			Obecná matematika			Minor Matematika		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Matematická analýza I-III	**4/2**	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	2	0	1	1	2
Matematická analýza IV	**2/2**	1	1	2	1	0	1	1	1	2	2	1	1	1	0	1
Funkcionální analýza I	**2/1**										2	1	1			
Analýza v komplexním oboru	**2/2**										2	1	0			
Obyčejné diferenciální rovnice	**2/2**										2	1	1			
Diferenciální geometrie křivek a ploch	**2/2**										1	1	0			

Numerická matematika		Finanč. a pojist. matematika			Modelování a výpočty			Statistika a analýza dat			Obecná matematika			Minor Matematika		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Numerické metody I	**2/2**	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	2	0	1	1	2
Numerické metody II	**2/1**	0	0	1	1	1	2	1	0	1						
Výpočetní matematické systémy	**2/2**	1	0	1	1	1	1	1	0	1						
Výpočetní statistika	**2/2**	0	0	1	0	0	1	1	0	2						
Teorie optimalizace	**2/2**	1	1	2	1	1	2	1	0	1						
Algoritmizace a numerické výpočty	**2/1**	1	0	1	1	1	2	1	0	1						
Numerické výpočty algebry	**2/1**	1	0	0	1	1	1	1	0	0						

Matematické modelování		Finanč. a pojist. matematika			Modelování a výpočty			Statistika a analýza dat			Obecná matematika			Minor Matematika		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Spojité deterministické modely I	**2/2**	1	0	1	1	1	2	1	1	1						
Diskrétní deterministické modely	**2/2**	1	0	1	1	1	2	1	0	2						
Nelineární dynamika	**2/2**	1	0	1	1	0	1	1	0	1						
Modelování a simulace	**2/1**	0	0	1	1	1	2	1	0	1						

Pravděpodobnost a statistika		Finanč. a pojist. matematika			Modelování a výpočty			Statistika a analýza dat			Obecná matematika			Minor Matematika		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Pravděpodob. a statistika I-II	**2/2**	1	1	1	1	0	2	2	1	2	2	2	0	1	0	2
Lineární statist. modely I	**2/2**	1	1	1	1	0	2	2	1	2						
Lineární statist. modely II	**2/2**	1	1	1	1	0	1	1	1	2						
Data mining I	**2/2**	1	1	2	1	0	1	2	1	2						

Finanční a pojistná mat.		Finanč. a pojist. matematika			Modelování a výpočty			Statistika a analýza dat			Obecná matematika			Minor Matematika		
		K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A	K	D	A
Finanční matematika I	**2/1**	2	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
Finanční matematika II	**2/1**	2	1	2	1	0	1	1	0	1						
Pojistná matematika	**2/1**	2	1	2				1	0	1						
Teorie portfolia	**2/2**	1	1	1												
Kapitoly z pojist. mat.	**2/0**	2	1	2												

5. Stručný přehled předjímaného obsahu bakalářského programu

Blok společný všem specializacím, po oblastech matematiky

Tato část také přímo navazuje na práci pracovní skupiny. Opět je uvedené třeba brát jako východisko k diskusi a jako ověření proveditelnosti celého konceptu. Zejména tento přehled nebere v potaz, ve kterých částech základních či jiných bloků budou zmiňované obsahové požadavky naplňovány (viz komentáře o překryvu oblastí v úvodu tohoto materiálu). Je proto třeba pečlivě zakomponovat do základních přednášek analýzy, algebry, geometrie atd. formou ilustrace využití budovaných pojmů a výsledků všechny koncepty a znalosti požadované níže alespoň informativně v těch oblastech, které v základních společných přednáškách zahrnuty vůbec nejsou.

5.1. Algebra a teorie čísel. *Detailně:* Základní algebraické struktury (grupa, okruh, obor integrity, těleso) - příklady a jejich základní vlastnosti. Homomorfismy a jejich jádra, podstruktury, dělitelnost v komutativním okruhu, ireducibilita, okruh s jednoznačným rozkladem. Základy elementární teorie čísel. Okruh polynomů jedné proměnné nad libovolným okruhem (speciálně nad tělesy: Euklidův algoritmus, jednoznačnost rozkladu, kořeny a jejich násobnost, souvislost s derivací). Okruh polynomů více proměnných. *Informativně:* základní věta algebry, booleovské algebry a svazy, algebraické aspekty maticového počtu, vybrané aplikace teorie grup (akce grup a související aplikace v kombinatorice apod.).
5.2. Geometrie a topologie. *Detailně:* základní pojmy vektorového počtu s důrazem na lineární a kvadratické koncepty (báze, lineární zobrazení, souvislosti s maticovým počtem, lineární a kvadratické formy). Geometrická interpretace a využití maticového počtu (vlastní čísla, základní principy spektrální teorie, diagonalizace a Jordanův tvar). Základy analytické geometrie (afinní a euklidovská geometrie, zobrazení). *Informativně:* Základní koncepty množinové topologie (spojitost, kompaktnost). Kvadriky, grupy transformací, základní koncepty geometrické topologie, homotopie, homologie, diskretizace apod.
5.3. Diskrétní matematika. *Detailně:* Elementy výrokové logiky a teorie množin (zobrazení, uspořádání, dobré uspořádání, ekvivalence a rozklady, kardinální a ordinální čísla). Elementární kombinatorika (pravidla součtu a součinu, Dirichletův princip, rozdělování předmětů do přihrádek), vytvořující funkce pro posloupnosti, řešení rekurencí. Základní pojmy teorie grafů. *Informativně:* příklady konkrétních algoritmů v aplikacích, diskrétní varianty konceptů a postupů matematické infinitesimální analýzy.
5.4. Matematická analýza. *Detailně:* Diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných (elementární funkce, limita, spojitost, derivace a diferenciál, volné a vázané extrémy). Integrální počet funkcí jedné a více proměnných (neurčitý integrál, Riemannův a Lebesgueův integrál, Lebesgueova míra, křivkový a plošný integrál, integrály závislé na parametru). Číselné a mocninné řady. Metrické prostory (metrika, konvergence, úplné a kompaktní prostory, Banachova věta o pevném bodu). ODR (existence a jednoznačnost počáteční úlohy pro rovnice 1. řádu, řešení rovnic 1. a 2. řádu, systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty). *Informativně:* základy teorie míry, základní pojmy z funkcionální analýzy (L^2 prostory, Hilbertovy a Banachovy prostory), základy Fourierovy analýzy (Fourierova řada a transformace, Laplaceova transformace, konvoluce), základy analýzy v komplexní proměnné (mocninné řady v $\boldsymbol{C}$, Cauchyova věta, Cauchyův vzorec). Příklady PDR. Základy teorie optimalizace a variačního počtu.
5.5. Numerická matematika. *Detailně:* Problematika robustnosti výpočtu a jeho chyb, iterativní numerické řešení rovnic (řešení nelineární rovnice, systémů lineárních a nelineárních rovnic). Základy numerické optimalizace (metoda nejmenších čtverců, metoda zlatého řezu, metoda půlení intervalu apod.). *Informativně:* interpolace (interpolační polynomy, splajny) a speciální metody pro polynomy (numerické metody hledání kořenů polynomů). Numerické derivování, integrování a řešení

diferenciálních rovnic. Maticové rozklady a jejich použití (singulární rozklad, LU rozklad, QR rozklad, pseudoinverzní matice).
5.6. Matematické modelování. *Detailně:* algoritmizace úloh, základní numerické výpočty a použití softwaru (Matlab, R, Maple, Sage apod.), spojité a diskrétní deterministické modely (struktura řešení lineárního systému a jeho kvalitativní vlastnosti, užití Laplaceovy transformace a transformace Z, autonomní systémy, trajektorie, stabilita řešení a aplikace na modely dynamiky populací, epidemiologické modely, ekonomické modely apod.).
5.7. Pravděpodobnost a statistika. *Detailně:* Kolmogorova axiomatická definice pravděpodobnosti, podmíněná pravděpodobnost. Náhodní veličiny a vektory, jejich číselné charakteristiky a asymptotické vlastnosti. Distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota. Náhodný výběr a statistiky. Metoda maximální věrohodnosti. Testování hypotéz. Lineární regrese, analýza rozptylu, analýza kovariance, korelační analýza. *Informativně:* Náhodný výběr a statistiky (nestrannost a konzistence). Testování hypotéz (příklady jedno-výběrových a dvou-výběrových testů). Stochastické modely (Markovské řetězce, matice přechodu, Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice).
5.8. Finanční a pojistná matematika. *Detailně:* Jednoduché úročení a diskontování, složené a spojité úročení a diskontování, investice, současná a budoucí hodnota, vnitřní míra výnosnosti, doba návratnosti, spoření, důchody, úvěry, dluhopisy, durace a konvexita, akcie. *Informativně:* Modelování délky života, funkce přežití a intenzita úmrtnosti, princip ekvivalence a výpočet čistého pojistného, modely počtu škod a jejich velikosti.
5.9. Přehled o programovacích jazycích a výpočetních systémech. Ačkoli nejde o jednu z oblastí matematiky, do bloku základních dovedností a znalostí společných všem specializacím nutně musí patřit základní přednášky směřující k všeobecné počítačové gramotnosti a seznamující studenty se základy programování, databázových systémů a několika softwarovými prostředími pro práci matematika (např. z Sage, Matlab, Maple, Mathematica, R). Budeme pokračovat v dosavadní dobré spolupráci s Fakultou informatiky MU a zároveň budeme využívat příležitostí k přímému využívání zmíněných prostředí v běžné výuce matematiky.
5.10. Minory Matematika a Statistika. Nepominutelnou náplní studia v minoru Matematika nebo Statistika budou zejména znalosti a dovednosti popsané jako „detailní“ v bodech 5.1 až 5.7 výše.

Povinný blok a charakteristiky pro specializaci Statistika a analýza dat

5.11. Požadované znalosti.

- *Výpočetní statistika. Detailně:* Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního a alternativního rozdělení, testy hypotéz o parametrech normálního a alternativního rozložení, analýza rozptylu jednoduchého třídění (ANOVA), testy homogenity rozptylu, post-hoc metody mnohonásobného porovnávání, pojem pořadí, neparametrické testy o mediánech, porovnání empirického a teoretického rozložení, hodnocení kontingenčních tabulek, podrobná analýza čtyřpolních kontingenčních tabulek, jednoduchá korelační analýza, praktická práce s daty s využitím systému STATISTICA, volba adekvátních metod, ověřování předpokladů těchto metod a vyvozování závěrů plynoucích ze statistických analýz. *Informativně:* Průzkumová analýza jednorozměrných a vícerozměrných dat, diagnostické grafy, snížení dimenze dat metodou hlavních komponent, shluková analýza, základní typy uspořádání pokusů. Technický aparát: Základní metody matematické statistiky – náhodný výběr, výběrové statistiky a jejich rozložení, bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí, testování hypotéz.
- *Lineární statistické modely. Detailně:* Popisné statistiky a grafické vyšetřování vzájemné závislosti proměnných, lineární regresní model (formulace modelu, identifikovatelnost parametrů, bodové a intervalové odhady parametrů modelu, testování hypotéz o parametrech modelu, diagnostika a výběr modelu, implementace v R), praktické aspekty

modelování dat (výzkumná otázka, interpretace modelu, matoucí proměnné, multikolinearita, nesplnění předpokladů modelu). Asymptotické testy o středních hodnotách přes lineární regresní model (LRM) – jedno-faktorový model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixními efekty za homogenity a nehomogenity rozptylů, dvou-faktorový a hierarchický ANOVA model s fixními efekty, speciální situace v LRM – analýza kovariance (ANCOVA), kvadratická regrese, polynomická regrese, sdružené a podmíněné mnohorozměrné normální rozdělení, korelační analýza, ortogonální regresní model, LRM (homogenní a nehomogenní rozptyly), LRM s fixními efekty a korelovanými chybami, vážená metoda nejmenších čtverců. Implementace v R. Technický aparát: lineární zobrazení, rozklady matic, ortogonální projekce, jednorozměrné a vícerozměrné normální rozdělení a rozdělení s ním související.

- *Data mining. Detailně:* Příprava dat pro data mining, organizace dat, průzkumová analýza, mnohorozměrné škálování, deskriptivní modelování – analýza nákupního košíku, shluková analýza, prediktivní modelování – lineární regrese, logistická regrese, rozhodovací stromy, diskriminační analýza, základy práce v SAS, SQL. Technický aparát: Popisná statistika, metoda hlavních komponent, faktorová analýza, lineární regresní modely.
- *Numerické metody. Detailně:* Interpolace (Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, chyba polynomiální interpolace, iterovaná interpolace, Hermiteův interpolační polynom, kubické interpolační splajny), numerické derivování (formule založené na derivaci interpolačního polynomu, formule založené na Taylorovu rozvoji, Richardsonova extrapolace), numerické integrování (kvadraturní formule, stupeň přesnosti a chyba, Gaussovy kvadraturní formule, Newtonovy-Cotesovy kvadraturní formule, složené kvadraturní formule, speciální kvadraturní formule, Rombergova kvadraturní formule). Informativně: Evoluční optimalizační metody, numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic (počáteční úlohy, okrajové úlohy).

5.12. Charakteristika specializace. Specializace Statistika a analýza dat v bakalářském programu Matematika je určena pro studenty se zájmem o matematicko-statistické metody pro analýzu hromadných dat, jejich softwarovou implementaci a aplikace na reálná data v různých oblastech lidské činnosti. Studenti se seznámí se základy relevantních matematických a statistických metod nezbytných při řešení konkrétních úloh z praxe. Cílem studia je poskytnout studentům přehled v pravděpodobnosti a matematické statistice, které tvoří teoretický základ analýzy a zpracování hromadných dat. Dalším cílem je vybavit studenty základními dovednostmi potřebnými při statistické analýze a počítačovém zpracování datových souborů, které jsou potřeba v nejrůznějších oblastech lidské činnosti. Cílem studia je také připravit studenty na studium navazujících oborů magisterského studia se zaměřením na aplikovanou matematiku.

5.13. Profil absolventa. Absolvent specializace Statistika a analýza dat v bakalářském programu Matematika získá základní přehled z moderních metod používaných při analýze hromadných dat, zejména parametrických i neparametrických statistických technik. Bude schopen vybrat vhodné statistické a analytické nástroje při řešení zkoumaných problémů. Absolvent dokáže řešit složité praktické problémy v softwarových systémech jako je R, Matlab nebo SAS a umí výsledky analýz korektně interpretovat. Předpokládá se uplatnění absolventů ve vědeckopedagogických zařízeních, finančních, bankovních, pojišťovacích institucích, institucích státní správy a samosprávy, ve výrobní a obchodní sféře, ve službách a v orgánech spolupracujících s Evropskou unií při řešení interdisciplinárních úloh zejména v oblasti ekonomie, bankovnictví, pojišťovnictví, biometriky, životního prostředí a dalších přírodovědných i technických oborech. Získané vzdělání v specializaci Statistika a analýza dat je natolik univerzální, že absolvent bude dobře připraven na pružnou adaptaci v širokém spektru vyžadovaných činností souvisejících s analýzou reálných dat.

Povinný blok a charakteristiky pro specializaci Finanční a pojistná matematika

5.14. Požadované znalosti.

- *Finanční matematika. Detailně:* Diskrétní modely oceňování derivátů, cenné papíry a jejich výplata, nezávislost a redundance cenných papírů, jednokrokový model se dvěma scénáři, ocenění evropské opce, risk neutrální pravděpodobnostní míra, obecný jednokrokový model, portfolio a arbitráž, replikující portfolio, základní věta arbitrážní teorie, úplné a neúplné trhy, věta o úplnosti trhu, vícekrokové diskrétní modely, binomický model a jeho limita, dynamický delta hedging pro evropskou opci. Teorie portfolia – výnos a riziko portfolia, Markowitzův model, modely rovnováhy na kapitálových trzích, model oceňování kapitálových aktiv CAPM, faktorové modely a APT, sloučení CAPM a APT. *Informativně:* Riziko a výnos v jednokrokovém modelu, modely pro oceňování dluhopisů.
- *Pojistná matematika. Detailně:* Životní pojištění – základní pojmy, úmrtnostní tabulky, komutační čísla, výpočet jednorázového netto pojistného, výpočet běžného netto pojistného, všeobecná rovnice ekvivalence, brutto pojistné, technické rezervy, Zillmerova rezerva, pojistně matematické výpočty založené na netto rezervě a brutto rezervě. Neživotní pojištění – tarifní skupiny a základní ukazatele, brutto pojistné, technické rezervy, výpočet rezervy na pojistná plnění, bonus-malus systém. Markovská analýza, základy modelování individuálního rizika, model pro náhodný individuální škodní nárok, individuální model rizika, kolektivní model rizika, tarifování, teorie kredibility.
- *Lineární statistické modely. Detailně:* Popisné statistiky a grafické vyšetřování vzájemné závislosti proměnných včetně implementace v R, lineární regresní model (bodové a intervalové odhady a jejich vlastnosti, testování hypotéz, implementace v R a interpretace z pohledu aplikací), model s neúplnou hodností, multikolinearita, výběr modelu, praktické aspekty, řešení různých praktických problémů. *Technický aparát:* Lineární zobrazení, rozklady matic, ortogonální projekce, jednorozměrné a vícerozměrné normální rozdělení a rozdělení s ním související.
- *Data mining. Detailně:* Příprava dat pro data mining, průzkumová analýza dat, metody redukce dimenze, deskriptivní modelování – analýza nákupního košíku, shluková analýza, prediktivní modelování – lineární regrese, logistická regrese, rozhodovací stromy, základy práce v SAS. Informativně: Organizace dat, pokročilé metody lineární regrese, základy práce v SQL. Technický aparát: Popisná statistika, lineární algebra, maticová algebra, lineární a zobecněné lineární modely, strojové učení.

5.15. Charakteristika specializace. Současná finanční a pojistná praxe je nemyslitelná bez použití celé řady sofistikovaných matematických technik a modelů. Schopnost aplikovat správně modely finanční a pojistné matematiky vyžaduje solidní znalosti z teorie pravděpodobnosti, statistiky, lineárních statistických modelů, diferenciálních rovnic a neobejde se bez využití numerických metod. Na tento solidní teoretický základ pak v této specializaci navazují předměty zaměřené na samotné modely finanční a pojistné matematiky. Pokrývají standardní spektrum modelů využívaných v praxi, jako je teorie portfolia, diskrétní modely oceňování finančních derivátů, modely úmrtnosti, modely počtu a velikosti pojistných nároků, teorii kredibility, bonus malus systémy. Důležitou roli hrají také předměty zaměřené na počítačovou implementaci těchto modelů a analýzu velkých datových souborů.

5.16. Profil absolventa. Absolvent specializace Finanční a pojistná matematika má kvalitní základ znalostí z oblastí teorie pravděpodobnosti, statistiky, lineárních statistických modelů, diferenciálních rovnic, numerických metod a jejich počítačové implementace. Ovládá standardní modely jak finanční, tak pojistné matematiky (např. teorii portfolia, diskrétní modely oceňování opcí, modely úmrtnosti v životním pojištění, modely počtu a velikosti pojistných nároků, teorii kredibility, bonus malus systémy), které dokáže aplikovat v konkrétních praktických problémech, řešených ve finančních institucích jako jsou banky, pojišťovny, nebo penzijní a investiční fondy. Dokáže řešit složité praktické problémy v softwarových systémech jako je SAS, Matlab nebo R a umí výsledky korektně interpretovat.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Modelování a výpočty

5.17. Požadované znalosti.

- *Deterministické modely*. *Detailně:* Standardní spojité a diskrétní modely reálných procesů z různých vědních oblastí (populační ekologie, epidemiologie, ekonomie a dalších), jejich předpoklady, konstrukce a základní kvalitativní analýza, interpretace výsledků a případné modifikace. *Informativně:* Identifikace parametrů a odhady řešení, numerická řešení a počítačová implementace. *Technický aparát:* Struktura řešení lineárního systému a jeho kvalitativní vlastnosti, užití Laplaceovy transformace a transformace Z, autonomní systémy, trajektorie, stabilita řešení.
- *Algoritmizace úloh a výpočetní matematické systémy. Detailně:* Algoritmizace úloh, základní numerické výpočty a použití softwaru (Matlab, R, Maple, Sage apod.), maticové zápisy a výpočty, praktické úlohy využívající lineární algebru a jejich algoritmizace (populační modely, markovské řetězce, soustavy rovnic a nerovnic, metoda nejmenších čtverců, užití v geometrii, grafické výstupy zpracovaného algoritmu), psaní procedur (dávkové a funkční soubory); algoritmizace úloh vztahujících se k náročnějším tématickým okruhům z maticové a polynomiální algebry, praktické úlohy a problémy řešené v MATLABu a v jazyce R. *Informativně:* Binární zápis čísla, floating point number system, numerická přesnost, systémy počítačové algebry, kombinatorické výpočty, generování čísel, práce s datovým souborem. Aplikace technického aparátu: Využití determinantu, jádra matice, řešení soustav rovnic a nerovnic, vlastní čísla a vektory a jejich vlastnosti a užití, souvislost se stabilitou, pseudoinverzní matice, souvislost násobení a eliminace, LU rozklad a jeho užití.
- *Lineární statistické modely. Detailně:* Popisné statistiky a grafické vyšetřování vzájemné závislosti, lineární regresní model (formulace modelu, identifikovatelnost parametrů, bodové a intervalové odhady parametrů modelu, testování hypotéz o parametrech modelu, diagnostika a výběr modelu, implementace v R), praktické aspekty modelování dat (výzkumná otázka, interpretace modelu, matoucí proměnné, multikolinearita, nesplnění předpokladů modelu). Implementace v R. *Technický aparát:* Lineární zobrazení, rozklady matic, ortogonální projekce, jednorozměrné a vícerozměrné normální rozdělení a rozdělení s ním související.
- *Numerické metody*. *Detailně:* Interpolace (Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, chyba polynomiální interpolace, iterovaná interpolace, Hermiteův interpolační polynom, kubické interpolační splajny), numerické derivování (formule založené na derivaci interpolačního polynomu, formule založené na Taylorovu rozvoji, Richardsonova extrapolace), numerické integrování (kvadraturní formule, stupeň přesnosti a chyba, Gaussovy kvadraturní formule, Newtonovy-Cotesovy kvadraturní formule, složené kvadraturní formule, speciální kvadraturní formule, Rombergova kvadraturní formule). *Informativně:* Evoluční optimalizační metody, numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic (počáteční úlohy, okrajové úlohy).

5.18. Charakteristika specializace. Matematické modelování je důležitým a efektivním nástrojem při studiu, modelování nebo simulování reálných systémů. Deterministické modelování vyžaduje znalosti teorie diferenciálních rovnic a diferenčních rovnic apod., stochastické modelování vyžaduje znalosti statistiky, lineárních statistických modelů a modelování jako takové se neobejde bez velkého množství numerických metod. Oblast počítačové vědy (výpočtů) kombinuje implementaci matematických modelů, numerických metod, počítačových algoritmů a znalostí v konkrétní aplikační oblasti s cílem poskytnout další nástroj pro studium jevů, jejich simulaci a případně pro predikci jejich chování se snahou zejména usnadnit studium problémů, které jsou jinak obtížně řešitelné jinými přístupy.

5.19. Profil absolventa. Absolvent specializace Modelování a výpočty má základní znalosti z oblastí numerických metod, diferenciálních a diferenčních rovnic, statistiky, deterministického i stochastického modelování, nelineární dynamiky a jejich počítačové implementace. Absolvent zná standardní modely používané v mnoha vědních oborech (ekonomie, populační biologie, ekologie, biochemie, medicína, neurověda, epidemiologie, fyzika atd.). Má zkušenosti nejen s využitím nástrojů matematického modelování v různých aplikacích, ale dokáže také komunikovat s odborníky z různých oborů. Ve spolupráci s nimi umí analyzovat problém a implementovat jej do počítačového algoritmu za účelem jeho studia, simulace nebo predikce. Výsledky umí správně interpretovat.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Obecná matematika

5.20. Požadované znalosti.

- *Algebra a teorie čísel. Detailně:* Pokračování teorie grup (faktorizace grup, centrum grupy, p-grupy, klasifikace konečných komutativních grup, Sylowovy věty). Svazy (distributivní a modulární svazy, reprezentace konečných distributivních svazů a konečných Booleových algeber). Okruhy a polynomy (ideály, faktorové okruhy, tělesa, podílové těleso, rozšíření těles, konečná tělesa, symetrické polynomy). Univerzální algebra (podalgebry, homomorfismy, kongruence a faktoralgebry, součiny, termy, volné algebry, Birkhoffova věta). *Poznámky.* Témata „Teorie množin“, „Matematické logiky“ a „Teorie grafů“ zřejmě ponecháme ve formě nepovinné s očekáváním, že studenti, kteří se hodlají zaměřit v navazujícím magisterském studiu na "Algebru" si je zapisují. (Otázkou k diskusi je, zda mají všichni studenti obecné matematiky slyšet něco podrobněji o axiomu výběru, a pokud ano, tak kde.)
- *Geometrie a topologie. Detailně:* Afinní a projektivní prostory, multilineární algebra (duální vektorový prostor, tenzorový součin, vnější a symetrický součin, souřadnice tenzorů), polynomiální matice (kanonický tvar, souvislost s charakteristickým a minimálním polynomem a s Jordanovým kanonickým tvarem), celočíselné matice (Smithův normální tvar, souvislost s konečnými komutativními grupami), lineární programování (formulace úloh lineárního programování, Farkasovo lemma, dualita, konvexní kužely a polyedry, geometrické odvození simplexové metody). Diferenciální geometrie křivek a ploch (parametrické vyjádření, Frenetův trojhran, křivost a torse prostorové křivky, základní formy plochy, křivost plochy, vnitřní geometrie plochy). Pokračování topologie (axiomy oddělitelnosti, kompaktní prostory včetně kompaktifikace, souvislost, uniformní prostory a metrizovatelnost, základy homotopické teorie, Brouwerova věta). *Poznámky:* Elementární diferenciální a integrální počet s podporou geometrických nástrojů bude prezentován pod názvem „Globální analýza“ až jako magisterský předmět, budou si ho ale moci zapisovat i bakalářští studenti.
- *Komplexní analýza. Detailně:* Holomorfní funkce, Cauchyovy-Riemannovy podmínky, mocninné řady a elementární funkce v C, křivky v C, primitivní funkce v C, Cauchyova věta a integrální vzorec, konformní zobrazení, nezávislost na integrační cestě, výpočet nevlastních integrálů, Liouvilleova věta, Laurentovy řady, izolované singularity, princip maxima modulu, reziduová věta, aplikace teorie reziduí, analytické pokračování. *Informativně:* pojem Riemannovy plochy.
- *Funkcionální analýza.* Ortogonalita a obecné Fourierovy řady v Hilbertových prostorech (Rieszovy věty), Hahnova-Banachova věta a její důsledky (např. pro konvexní tělesa), duální prostory k prostorům funkcí a posloupností, slabá konvergence, reflexivita, Banachova-Steinhausova věta a její aplikace, prekompaktní množiny, rozdíly mezi konečnou a

nekonečnou dimenzí, spojitost, omezenost a invertibilita lineárních zobrazení, princip stejnoměrné omezenosti, duální prostor k separabilnímu Hilbertovu prostoru, slabá ohraničenost, reprezentace funkcionálů.

- *Diferenciální rovnice.* Existence a jednoznačnost řešení systémů lineárních rovnic, obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů, globální existence a jednoznačnost, úplná řešení, závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech, stabilita lineárních a perturbovaných lineárních systémů, Ljapunovova metoda. Množina řešení systémů lineárních rovnic, existence a jednoznačnost řešení pro nelineární systémy, ljapunovské pojetí stability, stejnoměrná, asymptotická a exponenciální stabilita, Hurwitzovo kritérium.

5.21. Charakteristika specializace. Obecná matematika je určena pro studenty se zájmem o vlastní tvůrčí práci při vytváření matematických teorií, modelů nebo jejich využívání. Studenti se seznámí podrobněji s matematickou analýzou založenou na klasických i moderních metodách spojité i diskrétní matematiky. Za tím účel projdou prohlubujícími kurzy zejména v oblasti algebry, geometrie a topologie a využití metod diferenciálního a integrálního počtu. Studentům přitom zůstane dostatek volnosti při volbě dalších předmětů diskrétní matematiky nebo matematické informatiky, resp. aplikačně zaměřených předmětů z nabídky našeho ústavu nebo napříč univerzitou.

5.22. Profil absolventa. Absolventi získají základní přehled o způsobech výstavby matematických teorií a na nich založených aplikací, včetně dostatečné průpravy v technice formulací a důkazů výsledků ve všech základních oblastech teoretické matematiky. Absolventi získají přehled o základních výsledcích, osvojí si matematické analytické myšlení a budou dobře připraveni pro navazující (postgraduální) studium v odborné matematice u nás nebo v zahraniční, ale mohou také pokračovat v některém z oborů aplikované matematiky.

6. Struktura bloků předmětů v magisterských programech.

Bloky předmětů a charakteristiky pro program Matematika

6.1. Společné povinnosti. Celý program bude mít společný *základní povinný blok* směřovaný k širšímu vhledu do základních matematických teorií, nezávisle na vlastním užším zaměření studentů. Přibližně 30 kreditů tohoto bloku bude, zhruba řečeno, rozprostřeno do 3 částí po přibližně 10 kreditech (tj. 1-2 semestrální kurzy).

- První část zaměřená na *klasickou matematickou analýzu* se bude zejména věnovat parciálním diferenciálním rovnicím – *Detailně:* Řešení PDR 1. a 2. řádu, Fourierova metoda řešení PDR, metoda charakteristik, Laplaceova a Poissonova rovnice, Greenovy funkce, rovnice vedení tepla a vlnová rovnice, Cauchyova-Kovalevské věta, harmonické funkce, plošné a objemové průměry funkcí, energetický princip, principy maxima, Duhamelův princip, jednoznačnost řešení a formulace počátečních okrajových úloh, metoda separace proměnných, Sobolevovy prostory, moderní metody řešení – slabá řešení, teorie stop, obecná teorie eliptických, parabolických a hyperbolických rovnic druhého řádu, regularita, zobecnění principu maxima, Ritzova-Galerkinova metoda. *Informativně:* Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu, hladkost řešení PDR, Poissonův a Kirchhoffův vzorec, slabá (zobecněná) formulace úloh, metoda pologrup s důrazem na klasické i moderní metody PDR.
- Druhý celek, *algebra a teorie čísel,* bude pokrývat následující problematiku: jazyk teorie kategorií, moduly (projetivní, injektivní, ploché moduly), homologickou algebru (řetězcové komplexy, derivované funktory), základy teorie reprezentací, základy Galoisovy teorie, základy komutativní algebry.
- Poslední část bude dávat základní přehled o využití algebraických a geometrických nástrojů při budování mnoha oblastí matematické analýzy. Pod názvem *globální analýza* budou pokryty zejména následující oblasti: geometrická prezentace základů diferenciálního a integrálního počtu, zobecnění pro variety, Lieovy grupy a algebry, jednoduché aplikace v diferenciálních rovnicích a dynamických systémech a teorii optimálního řízení.

6.2. Celková struktura programu. Společně s diplomovou prací je povinných blokem celého programu naplněno 50% kreditové hodnoty studia. Dalších přibližně třicet kreditů bude řešeno formou čtyř povinně volitelných bloků, přičemž aspoň z jednoho z nich budou studenti muset zvládnout velmi podstatnou část kreditové hodnoty (řekněme 80%, tj. alespoň 24 kreditů). Zbývajících 30 kreditů představuje volnost další orientace nebo specializace studenta. Okruhy státnicových otázek budou obsahovat specializační bloky tak, aby se studenti mohli ke státnicím připravit v souladu se svým zvoleným zaměřením.

6.3. Blok č. 1. Tento blok bude zaměřený na klasické metody matematické analýzy, s akcentem na teorii reálných funkcí a obyčejné diferenciální a diferenční rovnice, dynamické systémy apod. Bude zahrnovat zejména následující oblasti:

- *Dynamické systémy. Detailně:* Autonomní rovnice, klasifikace singulárních bodů lineárních a perturbovaných lineárních systémů, Poincarého-Bendixsonova věta, Dulacovo kritérium, konkrétní matematické modely např. v přírodních vědách, klasifikace modelů, teorie sestavení matematického modelu, spojité a diskrétní dynamické systémy, dimenzionální a matematická analýza matematických modelů. Informativně: Typy singulárních bodů dvojrozměrných systémů, struktura limitní množiny v R^2, charakteristické směry.
- *Funkcionální a spektrální analýza. Detailně:* Kompaktní operátory, spektrum operátoru, adjungované a samoadjungované operátory, Hilbertova-Schmidtova věta, diferenciální a integrální počet v Banachových prostorech, konvexní funkce v prostorech nekonečné dimenze, striktně a uniformně konvexní prostory, věty o pevném bodu, ekvivalentní tvary

Fourierových řad, Plancherelova věta, konvergence v normě, teorie L^p prostorů, Parsevalovy identity.
Informativně: Důsledky a aplikace Banachovy věty o inverzním operátoru, stupeň zobrazení pro nelineární operátory, tečné funkcionály, typy a vzájemný vztah integrálů, Dirichletovo jádro a bodová konvergence, Fejérovo jádro a konvergence v průměru, konvoluce a korelace, distribuce.

- *Obyčejné diferenciální rovnice. Detailně:* Absolutně spojité funkce, Carathéodoryho třída funkcí, existence a jednoznačnost řešení rovnic s nespojitou pravou stranou, množina řešení Cauchyovy úlohy, Carathéodoryho věta pro diferenciální rovnice vyšších řádů, prodloužitelnost řešení Cauchyovy úlohy, globální řešení Cauchyovy úlohy, dolní a horní řešení, Wintnerova věta, Kneserova věta, Fukuharovy věty. *Informativně:* Integrální rovnice, diferenciální a integrální nerovnosti, Kreinova věta, zobecnění.
- *Konvexní analýza a programování.* Detailně: konvexní množiny (teorie oddělitelnosti) a konvexní funkce (kritéria konvexnosti pro diferencovatelné funkce), Fenchelova transformace, jednorozměrné minimalizace a metody volných extrémů, Langrangeův princip, teorie duality. Informativně: subgradient a subdiferenciál, systémy konvexních nerovností, konkrétní metody jako Fibonacciho metoda, metoda zlatého řezu, metoda nejrychlejšího spádu, metoda sdružených gradientů, podmínky optimality, Kuhnovy-Tuckerovy podmínky, konvexní programování, slabá a silná dualita, sedlové body.

6.4. Blok č. 2. Tento blok je pokračováním nabídky zaměření na metody matematické analýzy, tentokrát s akcentem na využívání algebraických a geometrických nástrojů. Bude zahrnovat zejména následující oblasti:

- *Funkcionální a spektrální analýza**.** Detailně:* Kompaktní operátory, spektrum operátoru, adjungované a samoadjungované operátory, Hilbertova-Schmidtova věta, diferenciální a integrální počet v Banachových prostorech, konvexní funkce v prostorech nekonečné dimenze, striktně a uniformně konvexní prostory, věty o pevném bodu, ekvivalentní tvary Fourierových řad, Plancherelova věta, konvergence v normě, teorie L^p prostorů, Parsevalovy identity.
- *Pokročilá komplexní analýza.* Základy Riemannových ploch, základy analýzy ve více proměnných a další vybrané partie obecné teorie.
- *Algebraická topologie.* CW-komplexy. Simpliciální homologie. Singulární homologie a kohomologie. (Ko)homologie CW-komplexů. Součiny v kohomologiích. Poincarého dualita. Homotopické grupy. Fibrace a kofibrace. Fundamentální grupa, van Kampenova věta. Hurewitzova věta. Whiteheadova věta. Věta o výřezu, Freudenthalova věta.
- *Algebraická geometrie.* Rezultanty, Gröbnerovy báze. Afinní variety. Hilbertova věta o nulách. Polynomiální funkce, vztah afinních variet a algeber. Projektivní variety. Regulární zobrazení, dominantní zobrazení, biracionální ekvivalence, vztah kvaziprojektivních variet a rozšíření. Dimenze variety. Tečný prostor. Bezoutova věta.
- *Diferenciální geometrie.* Hlavní a asociované fibrované prostory, konexe a další vybrané partie diferenciální geometrie.

6.5. Blok č. 3 zahrnuje předměty algebry, topologie a geometrie.

- *Galoisova teorie.* Algebraická, jednoduchá a konečná rozšíření těles. Klasické konstrukce pravítkem a kružítkem. Rozkladová tělesa a normální rozšíření, algebraický uzávěr. Separabilní a neseparabilní rozšíření. Základní věta Galoisovy teorie. Cyklická a radikálová rozšíření. Řešitelné grupy, souvislost s vyjadřováním kořenů polynomů v radikálech.
- *Teorie kategorií*. Kategorie, funktory, přirozené transformace. Yonedovo lemma. Limity a kolimity. Adjungované funktory, Freydova věta. Kartézsky uzavřené kategorie. Monoidální kategorie.

- *Teorie her.* Hra *n* hráčů v normální formě, rovnovážné situace, maticová a bimaticová hra, úloha o dohodě, opakované hry, hra v rozšířené formě. Hra ve tvaru charakteristické funkce, jádro, von Neumannovo-Morgensternovo řešení, Shapleyho vektor. Teorie sociálního výběru.
- *Algebraická topologie.* CW-komplexy. Simpliciální homologie. Singulární homologie a kohomologie. (Ko)homologie CW-komplexů. Součiny v kohomologiích. Poincarého dualita. Homotopické grupy. Fibrace a kofibrace. Fundamentální grupa, van Kampenova věta. Hurewitzova věta. Whiteheadova věta. Věta o výřezu, Freudenthalova věta.
- *Algebraická geometrie.* Rezultanty, Gröbnerovy báze. Afinní variety. Hilbertova věta o nulách. Polynomiální funkce, vztah afinních variet a algeber. Projektivní variety. Regulární zobrazení, dominantní zobrazení, biracionální ekvivalence, vztah kvaziprojektivních variet a rozšíření. Dimenze variety. Tečný prostor. Bezoutova věta.

6.6. Blok č. 4 je tvořen předměty na pomezí diskrétní matematiky a informatiky.

- *Teorie her.* Hra n hráčů v normální formě, rovnovážné situace, maticová a bimaticová hra, úloha o dohodě, opakované hry, hra v rozšířené formě. Hra ve tvaru charakteristické funkce, jádro, von Neumannovo-Morgensternovo řešení, Shapleyho vektor. Teorie sociálního výběru.
- *Teorie kódování.* Entropie, podmíněná entropie, informace a jejich vztahy a vlastnosti. Věta o kódování bez šumu pro zdroje bez paměti. Kompaktní kódování. Šumový kanál, jeho kapacita a Shannonova věta o kódování pro šumové kanály. Samoopravné kódy. Lineární kódy. Cyklické kódy.
- *Kryptografie.* Kryptografie a její cíle, Kerckhoffsův princip, základní kryptoanalytické útoky, kryptografické elementy, kryptografické protokoly, starověké šifrování, lineární posuvné registry, symetrické blokové a proudové šifry (operační módy, DES, AES). Problematika eliptických křivek. Asymetrický šifrovací systém, příklady algoritmů, základy použití. Jednocestné funkce. Hashovací funkce v kryptografii, generování klíčů, digitální podpisy (RSA, DH), ukládání hesel. Řízení přístupu - identifikace, autentizace. Možnosti autentizace (hesla, biometriky, čipové karty, certifikáty).
- *Algoritmy teorie čísel.* Fermatův test a Carmichaelova čísla, Rabinův-Millerův test. Test Poclingtona-Lehmera, Metoda eliptických křivek. Test Agarwala-Kayala-Saxeny. Hledání netriviálního dělitele přirozeného čísla N: Lehmannova metoda, Pollardova rho metoda, Pollardova p-1 metoda, Metoda řetězových zlomků, Metoda eliptických křivek, Metoda kvadratického síta.
- *Teorie kategorií*. Kategorie, funktory, přirozené transformace. Yonedovo lemma. Limity a kolimity. Adjungované funktory, Freydova věta. Kartézsky uzavřené kategorie. Monoidální kategorie.

6.7. Charakteristika programu. Struktura programu Matematika je zvolena tak, aby na jedné straně všichni absolventi získali základní přehled o všech zásadních oblastech teoretické matematiky a v nich používaných základních přístupech a technikách, zároveň ale umožňuje jednotlivým studentům volbu svého zaměření na jednu z těchto oblastí. Klíčová podporovaná zaměření jsou

- *klasická matematická analýza* s důrazem na teorii reálných funkcí a diferenciální či diferenční rovnice, dynamické systémy a teorii optimalizace;
- *matematická analýza opírající se o algebraické a geometrické nástroje* s důrazem na komplexní analýzu, globální analýzu, geometrickou analýzu, diferenciální geometrii a topologii;
- *metody algebry, teorie čísel a diskrétní matematiky*, včetně přesahu k teoretické informatice;
- *algebraický přístup k analýze* výpočetních problémů opírající se o topologické a geometrické postupy.

Všechna tato dílčí zaměření jdou vstříc využívání matematiky v současné fyzice, technických vědách, vědách o živé přírodě, ekonomii apod., kde typicky nacházíme kombinace metod klasické matematické analýzy, výpočetních numerických metod a postupů využívajících sofistikovaných nástrojů geometrické a algebraické povahy.

6.8. Profil absolventa. Absolvent programu Matematika má dosti pokročilé znalosti ze všech tradičních oblastí matematiky a hlubší vhled do alespoň jedné z nich. Je připraven na samostatnou tvůrčí práci rozvíjející matematické metody a nástroje nebo na inovativní využití takových pokročilých metod. Důraz je kladen na hloubku pochopení jednotlivých oblastí, jejich vzájemných souvislostí, včetně souvislostí s vybranými aplikovanými problémy z přírodních a společenských věd (fyzika, chemie, biologie, medicína, ekonomie apod.). Absolvent je v rámci své profesní činnosti v oblasti matematiky a jejích aplikací schopen aktivně komunikovat a pracovat v angličtině. Absolvent je připravován pro profese vyžadující samostatné analytické myšlení a tvořivý přístup pro řešení zadaných úkolů.

Bloky předmětů a charakteristiky pro program Aplikovaná matematika

6.9. Společné povinnosti. V tomto programu jsou navrženy tři společné povinné předměty (celkem 18 kreditů) :

- *Náhodné procesy a časové řady. Detailně:* Vlastnosti a charakteristiky náhodných poslopupností a časových řad: rozdělení, striktní a slabá stacionarita, střední hodnota, autokovarianční a autokorelační funkce. Odhady charakteristik stacionárních časových řad a inference pro ně. Modelování deterministických složek (trendu a sezonnosti) pomocí regrese, vyhlazování a dekompozic. Modelování stacionárních časových řad pomocí ARMA modelů: vlastnosti ARMA modelů (kauzalita, invertibilita), korelační struktura ARMA procesů (autokorelace, parciální autokorelace), predikce v ARMA modelech (nejlepší lineární predikce, algoritmy, predikční neurčitost, vícekrokové predikce), odhadování parametrů ARMA modelů (jednoduché metody, maximální věrohodnost, vlastnosti odhadů). Rozšíření ARMA modelů pro sezonní řady a nestacionární řady s jednotkovými kořeny (SARIMA modely). Budování a diagnostika modelů. *Informativně:* Markovská vlastnost náhodných procesů, příklady markovských procesů a modelů.
- *Stochastické modely a analýza. Detailně:* Wienerův proces, geomWienerův proces, geometrický Brownův pohyb, Ornsteinův-Uhlenbeckův proces. Stochastický integrál a kalkulus. Itoovo lemma. Stochastické diferenciální rovnice a jejich řešení. Martingaly se spojitým časem. Změna pravděpodobnostní míry. Girsanovova věta. Aplikace ve finanční matematice (oceňování opcí), biologii (model neuronu) a inženýrství (model degradace). Simulační studie pro difuzní procesy. *Informativně:* L2 prostor náhodných veličin a L2-konvergence; řešení parciální diferenciální rovnice vedení tepla a Feynmanova-Kacova věta; čas prvního dosažení; další difuzní procesy; numerické řešení stochastických diferenciálních rovnic.
- *Numerické metody. Detailně:* Maticové numerické metody — blokové operace s maticemi, rozklady matic a jejich použití (QR rozklad a SVD rozklad), výpočet vlastních hodnot a vlastních vektorů). Metoda nejmenších čtverců – klasický přístup a přístup pomocí pseudoinverze, metoda nelineárních nejmenších čtverců, metoda půlení intervalu, Newtonova-Raphsonova metoda, quasi Newtonova metoda, metoda zlatého řezu, Nelderova-Meadova metoda. *Informativně:* Speciální metody pro řešení systému lineárních rovnic (řídké matice), numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic (diferenční metody, variační metody).

Dále bude nabízen blok pěti povinně volitelných předmětů

- Bayesovské metody,

- Statistické modely životního pojištění,
- Dynamické systémy,
- Parciální diferenciální rovnice,
- Konvexní analýza a programování,

kterými jsou doplněny společné povinnosti všech specializací. Z nich si studenti budou vybírat dva až tři předměty.

6.10. Minor a Maior v Aplikované matematice. Povinné a povinně volitelné společné předměty z minulého odstavce budou zároveň tvořit požadavky na program minor, s dalším volitelným výběrem doporučovaným dle druhého zaměření ve sdruženém studiu.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Statistika a analýza dat

6.11. Požadované znalosti.

- *Parametrická a neparametrická statistická inference*. *Detailně:* Vybrané diskrétní a spojité modely rozdělení pravděpodobnosti – binomický, Poissonův, hypergeometrický, negatívně binomický, multinomický, součinově-multinomický, normální a mnohorozměrně normální, změs dvou a více normálních rozdělení, ZIP modely, rozdělení pravděpodobnosti ze třídy zobecněného gama a související rozdělení. Funkce věrohodnosti, jejich logaritmy a typy (relativní, profilová a odhadnutá funkce věrohodnosti). Různé aproximace funkcí věrohodnosti, delta metoda. Bodové a intervalové odhady parametrů. Testování statistických hypotéz Waldovým principem, věrohodnostním poměrem a skóre principem pro diskrétní (kategoriální) a spojitá data. Vybrané parametrické statistické testy pro parametry, vektory parametrů, podmnožiny parametrů, funkce parametrů. Testy dobré shody. Pořadové statistiky. Neparametrické bodové a intervalové odhady hustoty, distribuční funkce, funkce přežití, rizika a kumulativního rizika, střední hodnota času přežití a střední hodnota zůstatkového života. Neparametrické testy pro necenzorovaná a cenzorovaná data. Simulační studie. Implementace metod v R a aplikace na reálná data.
- *Teorie a praxe vyhlazování*. *Detailně:* Obecný princip jádrových odhadů. Jádrové odhady hustoty, kanonická jádra a teorie optimálních jader, jádra vyšších řádů. Odhady distribuční funkce. Různé typy jádrových odhadů regresní funkce, problém hraničních efektů. Jádrové odhady dvourozměrných hustot. Kritéria pro posouzení kvality odhadu, problém volby šířky vyhlazovacího okna. Interpolace a vyhlazování křivek a ploch pomocí jednorozměrných a mnohorozměrných splajnů. Zobecnění interpolace a vyhlazování na náhodní výběr křivek a ploch – registrace, resampling, biologická a geometrická homologie, sliding, zobrazování. Aditivní modely. Analýza funkcionálních dat. Implementace metod v Matlab a R a aplikace na reálná data.
- *Regresní modely a zobecněné regresní modely*. *Detailně:* Lineární regresní modely (LRM) s homogénnímy a nehomogennímy rozptyly, LRM s fixnímy efekty a korelovanými chybami. LRM se smíšenými a náhodnými efekty. Nelineární regresní model. Koncepty optimality v navrhování experimentů. Zobecněný aditivní model. Parametrické regresní modely v analýze přežití a v analýze historie událostí, Coxův regresní model. Hřebenová regrese, LASSO, regrese s hlavními komponentami. Zobecněný lineární model (exponenciální rodiny rozdělení, linková funkce, kanonická linková funkce), důležité zobecněné lineární modely (logistická regrese, poissonovská regrese, multinomická regrese, logaritmicko-lineární modely, kontingenční tabulky).

6.12. Charakteristika specializace. Specializace Statistika a analýza dat v magisterském programu Aplikovaná matematika navazuje na specializaci Statistika a analýza dat v bakalářském programu Matematika. Specializace Statistika a analýza dat je zaměřena na studium matematicko-statistických metod pro analýzu hromadných dat, jejich softwarovou implementaci a aplikace na reálná data. Cílem studia je seznámit studenty se základy matematické statistiky, statistického modelování, programovacími jazyky, databázovými systémy a moderními metodami používanými při zpracování hromadných dat a signálů. Dále vybavit studenty základními znalostmi potřebnými při počítačovém zpracování datových souborů a statistické analýze, které jsou používány v nejrůznějších oblastech lidské činnosti.

6.13. Profil absolventa. Absolvent specializace získá dobrý přehled moderních metod používaných při analýze hromadných dat, zejména parametrických i neparametrických statistických technik a spektrálních technik, bude schopen vybrat vhodné statistické a analytické nástroje při řešení zkoumaných problémů. Tyto metody bude schopen tvůrčím způsobem modifikovat a rozvíjet, implementovat je ve vhodném software a bude umět analyzovat informaci obsaženou v datových souborech různých typů. Předpokládá se uplatnění absolventů ve vědeckopedagogických zařízeních, finančních, bankovních, pojišťovacích institucích, institucích státní správy a samosprávy, ve výrobní a obchodní sféře, ve službách a v orgánech spolupracujících s Evropskou unií při řešení interdisciplinárních úloh zejména v oblasti ekonomie, bankovnictví, pojišťovnictví, biometriky, životního prostředí a dalších přírodovědných i technických oborech. Absolvent bude způsobilý učit statistické předměty na vysokých školách. Předpokládá se, že část absolventů bude pokračovat na třetím stupni studia (doktorské studium, titul Ph.D.) v statistických nebo příbuzných studijních oborech. Získané vzdělání ve specializaci Statistika a analýza dat je natolik univerzální, že absolvent bude dobře připraven na pružnou adaptaci v širokém spektru vyžadovaných činností práce související s analýzou reálných dat.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Finanční a pojistná matematika

6.14. Požadované znalosti.

- *Stochastické procesy ve finanční matematice. Detailně:* Náhodná procházka, prostorová a časová homogenita, princip reflexe, Markovova vlastnost, technika počítání trajektorií, věta o volbách, podmínění prvním krokem, aplikace generujících funkcí na náhodnou procházku, časy návratu do počátku a prvního navštívení daného bodu, rozdělení maximálních hodnot, Pólyova věta, zákony arcsinu, diskrétní filtrace a martingaly, martingalová transformace, aplikace na diskrétní modely ve finanční matematice, Poissonův proces. *Informativně:* Cramér-Lundbergův model, procesy obnovy, Wienerův proces, odvození Black-Scholesovy rovnice.
- *Oceňování finančních derivátů*. Detailně: Základní vlastnosti a dělení opcí, evropské a americké opce a jejich použití, put-call parita, opční strategie, horní a dolní odhady cen opcí, Blackův-Scholesův vzorec, delta a delta-hedging, analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce – Greeks, implikovaná volatilita a volatility smile, exotické opce a jejich oceňování, numerické metody pro evropské opce, oceňování amerických opcí pomocí numerických metod. Informativně: Blackův-Scholesův vzorec pro opce na akcie s dividendou, Numeraire, rozšíření Black-Scholesova vzorce pro stochastickou úrokovou míru. Modely vývoje úrokové míry, forwardy a opce na dluhopisy.
- *Matematické modely ve financích. Detailně:* Klasifikace rizik, Regresní modely a náhodné efekty, Sdílení rizik v segmentovaných sazbách, Hlad po bonusu a cenzurování, Modely kredibility, Modely kredibility zahrnující apriorní klasifikaci rizik, Kredibilitní vzorec s funkcí kvadratické ztráty, Modelování systémů bonus-malus, Pravděpodobnost přechodu, Dlouhodobé chování systémů Bonus-Malus, Stacionární distribuce, Konvergence ke stacionární distribuci, Relativity s funkcí kvadratické ztráty, Bayesovské relativity, Interakce mezi systémy Bonus-Malus a apriorním tarifováním, Loimarantova účinnost, De Prilova.

Informativně: Poissonův regresní model, Nadměrná disperze, Bayesovské metody a jejich aplikace v teorii portfolia.

- *Statistické modely životního pojištění* (*Detailně:* Charakteristiky přežívání a jejich aktuárská notace distribuční funkce, funkce přežití, hustota, funkce rizika, střední hodnota a rozptyl času přežití, průměrný zůstatkový život. Vybrané modely rozdělení pravděpodobnosti ze třídy zobecněného gama a související rozdělení. Funkce věrohodnosti, bodové a intervalové odhady parametrů vybraných rozdělení, statistická inference pro necenzorovaná a cenzorovaná data, testy dobré shody, výběr vhodného rozdělení, testování statistických hypotéz Waldovým principem, věrohodnostním poměrem a skóre principem. Parametrické regresní modely v analýze přežití pro necenzorovaná a cenzorovaná data. Gompertzovo, Makehamovo a zobecněné Gompertzovo-Makehamovo rozdělení. Životné pojištění pro jeden a více životů, současná hodnota, střední hodnota, druhý moment a rozptyl současné hodnoty jednotlivých pojištění. Implementace metod v R a aplikace na reální data.
- *Modely ztrát v neživotním pojištění*. *Detailně:* Metody matematické statistiky používané v pojišťovnictví, metoda maximální věrohodnosti, metoda minimálního chí-kvadrát, metoda momentů, metody pro posouzení vhodnosti modelu, modelování extrémních a řídkých událostí, modelování závislostí pomocí kopul. Informativně: Základy Bayesovské statistiky, metody pro výběr vhodného modelu z několika.
- *Matematicko-statistické metody v pojišťovnictví*. *Detailně:* Pravděpodobnostní rozdělení a jejich charakteristiky v pojistné matematice. Spojité modely, operace s distribucemi. Rozdělení třídy (a,b,0) a (a,b,1). Složená čítací rozdělení. Panjerova rekurze. Čítací procesy. Procesy s nezávislými přírůstky, operační čas. Čítací Markovské procesy s kladnou a zápornou nákazou. Smíšené Poissonovy procesy. Modifikace a useknutí v nule. Modely celkové ztráty. Složený Poissonův proces. Metody pro výpočet celkového nároku, analytické, rekurzivní a inverzní metody. Teorie ruinování. Adjustační koeficient a Lundbergova nerovnost, Cramérův asymptotický vzorec. *Informativně:* Chvosty distribucí a jejich klasifikace. Míry rizika. TvaR. Modely ruinování založené na Brownově pohybu.

6.15. Charakteristika specializace. Specializace Finanční a pojistná matematika v magisterském programu Aplikovaná matematika navazuje na specializaci Finanční a pojistná matematika v bakalářském programu Matematika. Současná finanční a pojistná praxe je nemyslitelná bez použití celé řady sofistikovaných matematických technik a modelů. Teoretické základy magisterské specializace vycházejí ze solidních znalostí z teorie stochastických procesů, stochastické analýzy, bayesovských metod, analýzy časových řad, parciálních diferenciálních rovnic, spektrální analýzy a neobejdou se bez využití pokročilých numerických metod. Na tento solidní teoretický základ pak navazují samotné modely finanční a pojistné matematiky. Pokrývají především modely pro oceňování opcí a dalších finančních derivátů, kolektivní teorii rizika, teorii ruinování, pokročilé statistické metody a metody analýzy velkých datových souborů.

6.16. Profil absolventa. Absolvent oboru Finanční a pojistná matematika bude ovládat jak praktické, tak teoretické aspekty matematických technik a modelů využívaných ve finanční a pojistné praxi. Bude ovládat standardní matematické modely aktuárské matematiky, jako jsou teorie rizika, teorie ruinování, teorie kredibility, statistické metody analýzy závislosti a extrémních hodnot. Dále bude ovládat techniky použití a oceňování opcí a dalších finančních derivátů, s důrazem na jejich využití pro zajištění firem vůči tržním rizikům. Bude seznámen s modely struktury úrokových měr a jejich aplikacemi při analýze dluhopisů. Bude ovládat současný software používaný ve finanční a pojistné praxi a potřebné programovací techniky. Absolventi najdou uplatnění ve finančních institucích – bankách, pojišťovnách, penzijních a investičních fondech, jako firemní finanční analytici, a ve státní správě.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Modelování a výpočty

6.17. Požadované znalosti.

- *Deterministické modely*. *Detailně:* spojité deterministické modely procesů v živé i neživé přírodě, které jsou pokročilými aplikacemi ODR, PDR a FDR (rovnicemi se zpožděním), tj. dynamickými systémy v obecných lineárních prostorech; jejich konstrukce, analýza a interpretace, kvalitativní vlastnosti spojené s rovnováhou, její stabilitou nebo bifurkací (např. modely strukturovaných populací, chemická kinetiky, souvislost stochastického a deterministického popisu difúzních jevů, postupující vlny, Bělousovova-Žabotinského reakce, Turingův jev, souvislost s teorií bifurkací), teorie bifurkací a její aplikace (např. modely biochemických přepínačů, vznik oscilací, aplikace v neurovědě, hysteresní jevy, skokové jevy), práce v kontinuačním softwaru, teorie chaosu a její aplikace, standardní diskrétní a spojité modely s chaotickým chováním, řízení chaosu, užití chaosu v kryptografii. *Informativně:* Pseudo-náhodné generátory založené na chaosu, symbolická dynamika, fraktály, podivné atraktory. *Technický aparát:* Základy teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic a rovnic se zpožděním, spojité a diskrétní deterministické modely, stabilita řešení.
- *Stochastické modely markovského typu*. *Detailně:* Markovské řetězce s diskrétním a spojitým časem – pravděpodobnosti přechodu, klasifikace stavů, nerozložitelné a rozložitelné řetězce, stacionární a limitní rozdělení, odhady pravděpodobností přechodu, Chapman-Kolmogorovova rovnost, Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení, Poissonův proces, procesy množení a zániku, základní pojmy teorie hromadné obsluhy.
- *Numerické metody*. *Detailně:* Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic (jednokrokové a vícekrokové metody, metoda střelby, diferenční metody, variační metody, stabilita, koncergence), numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic (diferenční metody, variační metody, časově závislé rovnice). *Informativně:* Některé speciální metody.

6.18. Charakteristika specializace. Specializace Modelování a výpočty v magisterském programu Aplikovaná matematika navazuje na specializaci Modelování a výpočty v bakalářském programu Matematika. Matematické modelování je důležitým a efektivním nástrojem při studiu, modelování nebo simulování reálných systémů, zahrnuje jak kvalitativní, tak kvantitativní přístup s využitím znalostí z důležitých matematických oblastí. Stochastické modelování vyžaduje znalosti statistiky, lineárních statistických modelů, deterministické modelování vyžaduje znalosti teorie diferenciálních (obyčejných i parciálních) a diferenčních rovnic a jejich lineárních i nelineárních systémů, zejména autonomních. Modelování jako takové se neobejde bez efektivního využívání rozmanitých numerických metod. Oblast vědeckých výpočtů (computational science) kombinuje implementaci matematických modelů, numerických metod, počítačových algoritmů a znalostí v konkrétní aplikační oblasti s cílem poskytnout další nástroj pro studium jevů, jejich simulaci a případně pro predikci jejich chování se snahou zejména usnadnit studium problémů, které jsou jinak obtížně řešitelné jinými přístupy.

6.19. Profil absolventa. Absolvent specializace Modelování a výpočty má pokročilé znalosti z oblastí numerických metod, stochastického i deterministického modelování, nelineární dynamiky a teorie chaosu včetně otázek týkajících se stability dynamických systémů i numerických metod. Absolvent umí tvůrčím a inovativním způsobem přistoupit k řešení složitých interdisciplinárních problémů v mnoha vědních oborech (ekonomie, populační biologie, ekologie, biochemie, medicína, neurověda, epidemiologie, fyzika atd.). Absolvent umí ve spolupráci s odborníky z příslušné oblasti analyzovat problém, přistoupit k němu s matematickým nadhledem, využít standardní modely případně je tvůrčím způsobem inovovat a implementovat do počítačového algoritmu za účelem jeho studia, simulace nebo predikce jeho chování. Výsledky umí správně interpretovat, a tak přispět k řešení složitých interdisciplinárních problémů.

Povinný blok a charakterizace pro specializaci Diferenciální rovnice a jejich aplikace

6.20. Požadované znalosti.

- *Variační úlohy a diferenční rovnice. Detailně:* Formulace variačních úloh, nutné a postačující podmínky pro slabé extrémy, vztah slabého a silného extrému, odlišnosti variačních úloh s různým typem okrajových podmínek (pevné konce, volné konce), rozdíly mezi variačním počtem a klasickým diferenciálním počtem, druhá variace, symplektické systémy, homogenní a nehomogenní lineární systémy diferenčních rovnic, lineární diferenční rovnice vyšších řádů, stabilita diferenčních rovnic a systémů, Sturmova-Liouvilleova diferenční rovnice 2. řádu, diferenční rovnice a ortogonální polynomy. *Informativně:* Variace funkcionálu, podmínky optimality prvního a druhého řádu, podmínky pro silný extrém, transformace diferenčních systémů, prostory funkcí, dynamika diferenčních rovnic 1. řádu, diskrétní oscilační teorie, vztah k diferenciálním rovnicím a systémům.
- *Dynamické (spojité i diskrétní) systémy. Detailně:* Autonomní rovnice, klasifikace singulárních bodů lineárních a perturbovaných lineárních systémů, Poincarého-Bendixsonova věta, klasifikace modelů, teorie sestavení matematického modelu, Dulacovo kritérium, spojité dynamické systémy, konkrétní matematické modely v přírodních vědách, stacionární struktura a její existence a stabilita, Leslieho matice, Perronova-Frobeniova věta, modely s externí variabilitou*. Informativně:* Typy singulárních bodů dvojrozměrných systémů, struktura limitní množiny v R2, charakteristické směry, dimenzionální a matematická analýza matematických modelů, identifikace parametrů modelu
- *Numerické metody řešení rovnic. Detailně:* Formulace a řešitelnost Cauchyových problémů, přibližná řešení, určení a odhady chyb aproximace řešení, teorie stability, jednokrokové metody (např. Eulerova metoda, použití Taylorových rozvojů), vícekrokové metody (např. Adamsovy metody, metody na bázi prediktor-korektor), variační metody (např. Ritzova metoda, Galerkinova metoda), okrajové problémy, metoda střelby. *Informativně:* Diferenční metody, aplikace numerických metod na fyzikální problémy, globální řešení, asymptotické vlastnosti řešení.

6.21. Charakteristika specializace. Specializace Diferenciální rovnice a jejich aplikace v magisterském programu Aplikovaná matematika navazuje na specializace Obecná matematika a Modelování a výpočty v bakalářském programu Matematika. Diferenciální rovnice jsou efektivním matematickým nástrojem pro popis přírodních, technických i společenských jevů. Studium řešení diferenciálních rovnic umožňuje sledovat aktuální, zpětný a zejména budoucí vývoj sledovaných procesů a jeho změny v závislosti na změnách vstupních parametrů. Pro studium matematických zákonitostí jsou důležité tři základní techniky: analytické, kvalitativní a numerické metody, jejichž teoretickému porozumění a využití se tato specializace věnuje. Obor diferenciálních rovnic má široké uplatnění v přírodních, technických, ekonomických a společenských vědách.

6.22. Profil absolventa. Absolvent specializace Diferenciální rovnice a jejich aplikace má pokročilé znalosti z teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic. Má také základní znalosti v souvisejících oborech (okrajové úlohy, teorie stability lineárních a nelineárních systémů diferenciálních rovnic, funkcionální analýza, variační počet, numerické metody řešení diferenciálních rovnic) a rozumí jejich vzájemným souvislostem. Ovládá kvalitativní analýzu dynamických systémů včetně matematických modelů a aplikací vyskytujících se v přírodních, technických, ekonomických a společenských vědách. Vybrané aplikace umí implementovat do vhodného softwaru a umí správně interpretovat počítačové výsledky z těchto aplikací. Absolvent je připravován pro profese vyžadující samostatné analytické myšlení a kreativní přístup pro řešení zadaných úkolů.