Program APLIKOVANÁ MATEMATIKA, verze z 29. 11. 2017

Požadavky k SZZ

Státní závěrečná zkouška sestává z obhajoby diplomové práce a z ústní zkoušky.

Charakteristika závěrečné práce a její obhajoba

Zpracováním diplomové práce student prokazuje orientaci v problematice dané tématem práce a schopnost odborné práce pod vedením vedoucího. U obhajoby diplomové práce se hodnotí porozumění tématu a úroveň prezentace.

Charakteristika ústní zkoušky

Účelem zkoušky je prověřit, že absolvent je schopen vést debatu na odborné úrovni. Cílem ústní zkoušky není opakovat zkoušky z jednotlivých předmětů a zkoušet detailní znalost teorie a důkazů. Smyslem je prokázat všeobecný přehled o základních pojmech a výsledcích z jednotlivých oborů a širších souvislostech mezi nimi a o jejich možných aplikacích.

Technická realizace

U ústní zkoušky student obdrží **dvě (nebo tři?)** otázky, jednu z okruhu A společných oblastí znalostí programu Aplikovaná matematika a jednu (dvě?) ze znalostí své specializace, které jsou uvedeny v okruhu B. Následující okruhy vymezují pokládané otázky jen rámcově.

Vymezení rozsahu otázek k ústní zkoušce

A. **Společný okruh - základy matematiky**

1. *Základy časových řad:* vlastnosti a charakteristiky náhodných posloupností a časových řad, odhady charakteristik stacionárních časových řad a modelování deterministických složek (regrese, vyhlazování a dekompozice)

2. *ARMA modely: v*lastnosti ARMA modelů, korelační struktura ARMA procesů, predikce a odhad parametrů v ARMA modelech, rozšíření pro sezonní řady a nestacionární řady s jednotkovými kořeny (SARIMA modely)

3. *Stochastická analýza:* Wienerův proces a jeho vlastnosti, stochastický integrál, Itôovo lemma, řešení stochastických diferenciálních rovnic, martingaly, Girsanovova věta

4. *Stochastické modely:* modelování pomocí stochastických diferenciálních rovnic, Wienerův proces s driftem, geometrický Brownův pohyb, Ornsteinův-Uhlenbeckův proces, difuze

5. *Maticové numerické metody*: blokové operace s maticemi, rozklady matic a jejich použití, výpočet vlastních hodnot a vlastních vektorů; metoda nejmenších čtverců – klasický přístup a přístup pomocí pseudoinverze

6. *Optimalizační numerické metody:* Newtonova-Raphsonova metoda, Fisherova skóringová metoda, Nelderova-Meadova metoda, metoda bisekce, metoda zlatého řezu, Brentova-Dekkerova metoda; metoda nejmenších čtverců – obyčejná, pomocí pseudoinverze, nelineární

B. **Okruh otázek specializace Statistika a analýza dat**

1. Parametrická statistická inference 1: funkce věrohodnosti, jejich logaritmy a typy (relativní, profilová a odhadnutá funkce věrohodnosti); různé aproximace funkcí věrohodnosti, delta metoda; bodové a intervalové odhady parametrům

2. Parametrická statistická inference 2: testování statistických hypotéz Waldovým principem, věrohodnostním poměrem a skóre principem pro diskrétní (kategoriální) a spojitá data; vybrané parametrické statistické testy pro parametry, jejich funkce, vektory a podmnožiny parametrů

3. Neparametrická statistická inference 1: pořadové statistiky, hustota a distribuční funkce pořadové statistiky, minima a maxima; asymptotické rozdělení pořadové statistiky, rozptyl pořadové statistiky, středné hodnota a rozptyl mediánu, pás spolehlivosti pro distribuční funkci

4. Neparametrická statistická inference 2: hustota, distribuční funkce, funkce přežití, riziko a kumulativní riziko, střední hodnota času přežití a střední hodnota zůstatkového života; neparametrické odhady; neparametrické testy pro (ne)cenzorovaná data – dva a vícevýběrové testy funkcích přežití a rizika; zobecněný Spermanův a Kendalův koeficient korelace

5. Jádrové vyhlazování: obecný princip jádrových odhad, jádrové odhady hustoty a distribuční funkce, kanonická jádra a teorie optimálních jader, jádra vyšších řádů; jádrové odhady regresní funkce, jádrové odhady dvourozměrných hustot, kritéria pro posouzení kvality odhadu

6. Splajnové vyhlazování: interpolace a vyhlazování křivek a ploch pomocí jednorozměrných a mnohorozměrných splajnů; aditivní modely; zobecnění interpolace a vyhlazování na náhodní výběr křivek a ploch – registrace, resampling; analýza funkcionálních dat

7. Regresní modely 1: lineární regresní modely (LRM) s homogénnímy a nehomogennímy rozptyly, LRM s fixnímy efekty a korelovanými chybami, LRM se smíšenými a náhodnými efekty

8. Regresní modely 2: zobecněný lineární model (exponenciální rodiny rozdělení, linková funkce, kanonická linková funkce), důležité zobecněné lineární modely (logistická regrese, poissonovská regrese, multinomická regrese, logaritmicko-lineární modely, kontingenční tabulky)

9. Regresní modely 3: rozdělení pravděpodobnosti ze třídy zobecněného gama a související rozdělení; parametrické regresní modely v analýze přežití a v analýze historie událostí, Coxův regresní model

10. Regresní modely 4: koncepty optimality v navrhování experimentů, hřebenová regrese, LASSO, regrese s hlavními komponentami, nelineární regresní model

11. Mnohorozměrné statistické metody: testování mnohorozměrných hypotéz o vektorech středních hodnot a kovariančných maticích, MANOVA, profilová analýza, mnohorozměrné lineární regresní modely, PCA, PLS, faktorová analýza, analýza kanonických korelací, diskriminační analýza

12. Stochastické modely markovského typu: homogenní markovský řetězec se spojitým časem; proces vzniku a zániku a jeho speciální případy; teorie hromadné obsluhy – struktura systému hromadné obsluhy, Kendallova klasifikace, odvození charakteristik jednolinkového stabilizovaného systému

C. **Okruh otázek specializace Finanční a pojistná matematika**

1. *Teorie pravděpodobnosti:* náhodné veličiny a jejich charakteristiky, nezávislost, podmíněné očekávání, generující a charakteristické funkce a jejich aplikace, rozdělení třídy (a,b,1), složená čítací rozdělení

2. *Diskrétní stochastické procesy:* náhodná procházka, základní vlastnosti a techniky, věta o volbách, rozdělení maximálních hodnot, Pólyova věta, zákon arcsinu, diskrétní martingaly a filtrace

3. *Diskrétní modely ve financích:* portfolio a arbitráž, jednokrokové a vícekrokové diskrétní modely, risk-neutrální míra, oceňování opcí, binomický model, základní věta arbitrážní teorie, úplnost trhu a jeho charakterizace

4. *Spojité modely ve financích:* odvození Black-Scholesovy parciální diferenciální rovnice a její řešení, odvození Black-Scholesova vzorce pomocí základní věty arbitrážní teorie, jištění, delta hedging, analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce

5. *Finanční deriváty:* základní vlastnosti a použití opcí, pákový efekt, put-call parita, typy opčních strategií a jejich použití, implikovaná volatilita a volatility smile, oceňování exotických derivátů, forwardy a futures

6. *Úrokové míry:* okamžitá a forwardová úroková míra, modely struktury úrokových měr, deriváty úrokových měr a modely pro jejich oceňování, Vašíčkův model, CIR model

7. *Stochastické procesy v neživotním pojištění:* Poissonův proces, čítací procesy, procesy s nezávislými přírůstky, operační čas, čítací Markovské procesy s nákazou, smíšené Poissonovy procesy

8. *Modely celkové ztráty:* složený Poissonův proces, metody pro výpočet celkového nároku, Panjerova rekurze, teorie ruinování, adjustační koeficient a Lundbergova nerovnost

9. *Životní pojištění:* Charakteristiky přežívání, aktuárská notace; modely rozdělení pravděpodobnosti ze třídy zobecněného gama a související rozdělení; funkce věrohodnosti, bodové a intervalové odhady parametrů; střední hodnota a rozptyl současné hodnoty životného pojištění

10. *Statistické metody v životním pojištění:* Parametrické regresní modely v analýze přežití pro (ne)cenzorovaná data a data z úmrtnostních tabulek, Coxův regresní model. Testy dobré shody, výběr vhodného rozdělení, testování hypotéz věrohodnostním poměrem, Waldovým a skóre principem

11. *Teorie kredibility:* bayesovské metody, konjugovaná apriorní rozdělení, prediktivní hustota, bayesovské pojistné, kredibilitní pojistné, Buhlmannův model, bonus-malus systémy

12. *Statistické metody v neživotním pojištění:* metoda maximální věrohodnosti, metoda momentů, metody pro posouzení vhodnosti modelu, modelování extrémních a řídkých událostí, modelování závislostí pomocí kopul

D. **Okruh otázek specializace Modelování a výpočty**

1. *Teorie obyčejných diferenciálních rovnic:* systémy autonomních diferenciálních rovnic, trajektorie, stacionární řešení, stabilita, struktura řešení lineárního systému, věta o linearizaci, použití v deterministických modelech

2. *Pokročilé spojité deterministické modely – teoretické základy:* modely popsané dynamic-kými systémy v obecných lineárních prostorech, jejich konstrukce, analýza a interpretace, kvalitativní vlastnosti spojené s rovnováhou, příklady procesů vživé a neživé přírodě

3. *Pokročilé spojité deterministické modely – standardní aplikace*: standardní modely využívající PDR a FDR, souvislost stochastického a deterministického popisu difúzních jevů, postupující vlny, Bělousovova-Žabotinského reakce, Turingův jev

4. *Strukturované populační modely s konstantní projekční maticí*: konstrukce strukturovaného modelu, Perronova-Frobeniova věta, stabilizovaná struktura populace, růstový koeficient, matice citlivosti, čas strávený v jedné třídě, očekávaná doba dožití

5. *Strukturované populační modely – identifikace parametrů*: odhady parametrů strukturovaných populačních modelů (regresní metody, metoda kvadratického programování, metoda maximální věrohodnosti), odhady charakteristik populace se stabilizovanou strukturou (odhad růstového koeficientu, pravděpodobnosti přežití a fertilit)

6. *Teorie bifurkací:* jednoparametrické lokální bifurkace spojitých a diskrétních dynamických systémů, víceparametrické bifurkace, věta o centrální varietě, nelokální bifurkace, aplikace teorie bifurkací, typické jevy spojené se změnou atraktoru

7. *Teorie chaosu:* základní vlastnosti deterministického chaosu, vznik deterministického chaosu zdvojováním periody v diskrétních dynamických systémech, souvislost s komplexní dynamikou a fraktály (Mandelbrotova množina), chaos ve spojitých systémech (metoda Poincarého řezu), řízení chaosu, aplikace teorie chaosu

8. *Markovské řetězce:* markovské řetězce s diskrétním a spojitým časem – pravděpodobnosti přechodu, klasifikace stavů, nerozložitelné a rozložitelné řetězce, stacionární a limitní rozdělení, odhady pravděpodobností přechodu

9. *Stochastické modely markovského typu:* markovská vlastnost, Chapman-Kolmogorovova rovnost, Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení, Poissonův proces, procesy množení a zániku, teorie hromadné obsluhy

10. *Parciální diferenciální rovnice - klasické metody:* řešení lineárních a nelineárních rovnic prvního řádu, řešení lineárních rovnic druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných, (klasifikace rovnic druhého řádu), Fourierova metoda, metody integrálních transformací, Greenova funkce

11. *Numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic:* řešení počátečních úloh (jednokrokové a vícekrokové metody), řešení okrajových úloh (metoda střelby, diferenční metody, variační metody), stabilita a konvergence metod

12. *Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic*: diferenční metody, variační metody, časově závislé rovnice, stabilita a konvergence metod

E. Okruhy otázek specializace Diferenciální rovnice a jejich aplikace

1. *Lineární diferenční rovnice:* Množina řešení homogenních a nehomogenních rovnic a systémů, metoda variace konstant, transformace diferenčních systémů, lineární diferenční rovnice vyšších řádů, srovnání s diferenciálními rovnicemi a systémy.

2. *Obecná teorie diferenčních rovnic:* Dynamika diferenčních rovnic prvního řádu, stabilita lineárních diferenčních systémů, Sturmova-Liouvilleova diferenční rovnice 2. řádu, metody diskrétní oscilační teorie, symplektické diferenční systémy, ortogonální polynomy.

3. *Variační počet*: Funkcionály, prostory funkcí, první a druhá variace, slabý a silný extrém a jejich vzájemný vztah, nutné a postačující podmínky pro extrém, Eulerova rovnice, pevné a proměnné okrajové podmínky, aplikace.

4. *Obecná teorie ODR:* Carathéodoryho třída funkcí, existence a jednoznačnost řešení rovnic s nespojitou pravou stranou, Carathéodoryho věta pro rovnice vyšších řádů, prodloužitelnost řešení, globální řešení, dolní a horní řešení, Wintnerova věta, Kneserova věta, Fukuharovy věty.

5. *Autonomní rovnice*: Typy singulárních bodů dvojrozměrných systémů, klasifikace singulárních bodů lineárních a perturbovaných lineárních systémů, struktura limitní množiny v R^2, Dulacovo kritérium, Poincarého-Bendixsonova věta, charakteristické směry.

6. *Spojité matematické modely:* Pojetí dynamického systému, klasifikace modelů, konstrukce matematického modelu, dimenzionální a matematická analýza matematických modelů, příklady matematických modelů v přírodních vědách.

7. *Diskrétní matematické modely:* Projekční matice, stacionární struktura, její existence a stabilita, Perronova-Frobeniova věta, identifikace parametrů modelu z pozorovaných dat, příklady matematických modelů v přírodních vědách.

8. *Numerické metody řešení ODR*: řešení počátečních úloh (jednokrokové a vícekrokové metody), řešení okrajových úloh (metoda střelby, diferenční metody, variační metody), stabilita a konvergence metod.

9. *Numerické metody řešení PDR*: diferenční metody, variační metody, časově závislé rovnice, stabilita a konvergence metod

10. *Lineární PDR 2. řádu*: Klasifikace rovnic, principy řešení významných rovnic (Laplaceovy a Poissonovy rovnice, rovnice vedení tepla, vlnové rovnice), harmonické funkce, Greenova teorie, principy maxima, srovnání PDR a ODR, variační metody.

11. *Konvexní analýza*: Konvexní množiny, konvexní obaly, teorie oddělitelnosti, konvexní funkce, kritéria konvexnosti pro diferencovatelné funkce, subgradient a subdiferenciál, Fenchelova transformace, řešení systémů lineárních a konvexních nerovností.

12. *Matematické programování*: Metody nepodmíněné minimalizace (Fibonacciho metoda, metoda zlatého řezu, Newtonova metoda atd.), Langrangeův princip, podmínky optimality, Kuhnovy-Tuckerovy podmínky, konvexní programování, slabá a silná dualita, sedlové body, stínová cena.