Okruhy otázek k bakalářským státnicím programu Matematika
verze z 29. 11. 2017

A. Společné pro celý program

1. Základní algebraické struktury. Grupa, okruh, obor integrity, těleso. Homomorfismy a jejich jádra, podstruktury. Dělitelnost v komutativním okruhu, ireducibilita, okruh s jednoznačným rozkladem. Základy elementární teorie čísel. Okruhy polynomů.

2. Lineární algebra a analytická geometrie. Matice a operace s maticemi, soustavy lineárních rovnic. Vektorové prostory, podprostory, báze, lineární zobrazení, lineární a kvadratické formy. Prostory se skalárním součinem. Afinní a euklidovská geometrie.

3. Spektrální teorie v prostorech konečné dimenze. Vlastní čísla a vlastní vektory. Podobnost matic, Jordanův kanonický tvar. Samoadjungované a unitární operátory. Singulární rozklad matice, pseudoinverzní matice. Aplikace na řešení soustav lineárních rovnic.

4. Základy diskrétní matematiky. Výroková logika. Základy teorie množin (množiny, zobrazení, relace). Elementární kombinatorika (variace, kombinace, princip inkluze a exkluze). Základy teorie grafů.

5. Diferenciální počet. Elementární funkce, limity a spojitost, derivace a její geometrický význam, vyšetřování průběhu funkce, lokální a globální extrémy, věty o střední hodnotě, l'Hospitalovo pravidlo, parciální a směrové derivace, diferenciál funkcí a zobrazení, Taylorův polynom, implicitní a inverzní funkce, vázané extrémy.

6. Integrální počet. Primitivní funkce, metody integrace, konstrukce Riemannova integrálu a jeho vlastnosti, nevlastní integrál, věta o transformaci integrálu, základní příklady transformací, integrály závislé na parametru, křivkový a plošný integrál prvního a druhého druhu, geometrické a fyzikální aplikace určitého integrálu.

7. Míra a integrál. Definice a konstrukce míry, borelovské a lebesgueovsky měřitelné množiny, měřitelné funkce, abstraktní a Lebesgueův integrál, Lebesgueovy věty o limitním přechodu, vzájemný vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu, věta o substituci, Fubiniova věta, beta a gama funkce.

8. Nekonečné řady a metrické prostory. Kritéria konvergence číselných řad, absolutní a neabsolutní konvergence, Riemannova věta o přerovnání. Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná konvergence, derivování a integrování posloupností a řad funkcí, mocninné řady, poloměr konvergence, Taylorova řada. Metrický prostor, konvergence, otevřené a uzavřené množiny, spojitá a lipschitzovská zobrazení, úplné a kompaktní prostory, prostor spojitých funkcí, prostory L^p, Banachova věta o pevném bodu a její aplikace.

9. Základy numerické matematiky. Iterativní numerické řešení rovnic (řešení nelineární rovnice, systémů lineárních a nelineárních rovnic), základy numerické optimalizace (metoda nejmenších čtverců, metoda zlatého řezu, metoda půlení intervalu apod.).

10. Základy teorie pravděpodobnosti. Kolmogorova axiomatická definice pravděpodobnosti, podmíněná pravděpodobnost. Bayesův vzorec. Náhodné veličiny a vektory, jejich číselné charakteristiky. Distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota. Příklady diskrétních a spojitých rozdělení. Zákon velkých čísel a centrální limitní věta.

11. Základy statistiky. Náhodný výběr a statistiky, nestrannost a konzistence. Testování hypotéz, příklady jednovýběrových a dvouvýběrových testů, základy teorie odhadu.

12. Základy finanční a pojistné matematiky. Jednoduché úročení a diskontování, složené a spojité úročení a diskontování, investice, současná a budoucí hodnota, vnitřní míra výnostnosti, doba návratnosti, spoření, důchody, úvěry, dluhopisy, durace a konvexita.

B. Pro specializaci Finanční a pojistná matematika

1. Finanční matematika. Diskrétní modely oceňování derivátů, cenné papíry a jejich výplata, risk neutrální pravděpodobnostní míra, obecný jednokrokový model, portfolio a arbitráž, základní věta arbitrážní teorie, úplnost a neúplnost trhu, věta o úplnosti trhu.

2. Teorie portfolia. Výnos a riziko portfolia, Markowitzův model, modely rovnováhy na kapitálových trzích, přímka kapitálového trhu, tržní portfolio, model oceňování kapitálových aktiv CAPM.

3. Životní pojištění. Úmrtnostní tabulky, výpočet jednorázového netto pojistného, výpočet běžného netto pojistného, všeobecná rovnice ekvivalence, brutto pojistné, technické rezervy, Zillmerova rezerva, pojistně matematické výpočty založené na rezervě.

4. Neživotní pojištění. Tarifní skupiny a základní ukazatele, technické rezervy a výpočet rezervy na pojistná plnění, bonus-malus systém, individuální model rizika, kolektivní model rizika, teorie kredibility.

5. Lineární statistické modely. Lineární regresní model, odhady parametrů a jejich vlastnosti, testování hypotéz, konfidenční a predikční intervaly, výběr a diagnostika modelu, multikolinearita a model s neúplnou hodností.

6. Data mining. Příprava dat pro data mining, organizace dat, průzkumová analýza, analýza hlavních komponent, deskriptivní modelování (analýza nákupního košíku, shluková analýza), prediktivní modelování (lineární regrese, logistická regrese a ROC křivky).

C. Pro specializaci Modelování a výpočty

1. Spojité deterministické modely. Základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic a systémů (především autonomních) a jejich aplikace, standardní spojité modely reálných procesů z různých vědních oblastí, předpoklady, konstrukce modelu, základy kvalitativní analýzy

2. Diskrétní deterministické modely. Základy teorie diferenčních rovnic a systémů (především autonomních) a jejich aplikace, standardní diskrétní modely reálných procesů z různých vědních oblastí, předpoklady, konstrukce modelu, základy kvalitativní analýzy s důrazem na souvislosti mezi diskrétním a spojitým modelováním, jejich odlišnosti.

3. Výpočetní matematické systémy. Základní znalosti o výpočetní matematice (binární zápis čísla, floating point number system), základní typy matematického softwaru a jejich odlišnosti, příklady praktických úloh využívajících lineární algebru a jejich algoritmizace (populační modely, markovské řetězce, soustavy rovnic a nerovnic, metoda nejmenších čtverců, geometrie a grafika), souvislosti s důležitými pojmy lineární algebry.

4. Lineární statistické modely. Lineární regresní model, odhady parametrů a jejich vlastnosti, testování hypotéz, konfidenční a predikční intervaly, výběr a diagnostika modelu, multikolinearita a model s neúplnou hodností.

5. Numerické interpolační metody. Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, chyba polynomiální interpolace, iterovaná interpolace, Hermiteův interpolační polynom, kubické interpolační splajny.

6. Numerické metody diferenciálního a integrálního počtu. Numerické derivování (formule založené na derivaci interpolačního polynomu a rozvoji do Taylorovy řady), numerické integrování (kvadraturní formule, stupeň přesnosti a chyba, Gaussovy kvadraturní formule, Newtonovy-Cotesovy kvadraturní formule, složené kvadraturní formule)

D. Pro specializaci Obecná matematika

1. Algebra. Svazy (úplné, modulární, distributivní), Booleovy algebry. Normální podgrupy a faktorizace grup. Ideály a faktorizace okruhů. Maximální ideály a prvoideály. Rozšíření těles a jeho stupeň. Konečná tělesa. Základy univerzální algebry.

2. Lineární algebra a geometrie. Systémy lineárních nerovnic, Farkasovo lemma, věta o dualitě v lineárním programování. Rozklad polyedrů, Minkowského věta. Geometrické odvození simplexové metody. Tenzorový součin vektorových prostorů, jeho vlastnosti, báze tenzorového součinu, souřadnice tenzorů. Symetrické a antisymetrické tenzory, objemové formy. Smithův normální tvar celočíselných a polynomiálních matic.

3. Topologie. Topologické prostory, spojitá zobrazení. Oddělitelnost (Hausdorffovy, regulární, úplně regulární a normální prostory). Souvislost, lokální souvislost. Kompaktnost, lokální kompaktnost, kompaktifikace.

4. Lineární funkcionální analýza. Rozdíly mezi konečnou a nekonečnou dimenzí, Fourierovy řady v Hilbertových prostorech, Hahnova-Banachova věta a její důsledky, duální prostory, reflexivita, Banachova-Steinhausova věta a její aplikace, kompaktní a prekompaktní množiny.

5. Obyčejné diferenciální rovnice. Metody řešení rovnic 1. řádu a lineárních rovnic a systémů, existence a jednoznačnost řešení, rovnice vyšších řádů, globální vlastnosti řešení, závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech, stabilita lineárních a perturbovaných lineárních systémů.

6. Komplexní analýza. Cauchyovy-Riemannovy podmínky, komplexní diferencovatelnost, holomorfní funkce, Cauchyovy integrální vzorce, nezávislost integrálů na integrační cestě, reziduová věta, Liouvilleova věta, Cauchyova nerovnost, Morerova věta, Laurentovy řady.

7. Diferenciální geometrie křivek a ploch. Afinní a projektivní prostory. Kuželosečky a kvadriky a jejich klasifikace**.** Parametrické vyjádření a rovnice křivek a ploch. Styk křivek a styk křivky s plochou. Oblouk křivky, Frenetův trojhran, křivost a torse prostorové křivky. První a druhá základní forma plochy, střední a Gaussova křivost.

E. Pro specializaci Statistika a analýza dat

1. Výpočetní statistika. Normální a alternativní rozdělení, bodové a intervalové odhady pro parametry těchto rozdělení, testy hypotéz o parametrech těchto rozdělení, neparametrické testy o mediánech, porovnání empirického a teoretického rozložení (testy dobré shody), kontingenční tabulky.

2. Lineární statistické modely I. Lineární regresní model, odhady parametrů a jejich vlastnosti, testování hypotéz, konfidenční a predikční intervaly, výběr a diagnostika modelu, multikolinearita a model s neúplnou hodností.

3. Lineární statistické modely II. Jednofaktorový a dvoufaktorový model ANOVA s fixními efekty, speciální LRM – LRM s jednou kategoriální proměnnou (jednovýběrový, dvouvýběrový a vícevýběrový případ), ANCOVA model, případ dvou a více přímek, kvadratická regrese, korelační analýza.

4. Data mining. Příprava dat pro data mining, organizace dat, průzkumová analýza, analýza hlavních komponent, deskriptivní modelování (analýza nákupního košíku, shluková analýza), prediktivní modelování (lineární regrese, logistická regrese a ROC křivky).

5. Numerické interpolační metody. Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, chyba polynomiální interpolace, iterovaná interpolace, Hermiteův interpolační polynom, kubické interpolační splajny.

6. Numerické metody diferenciálního a integrálního počtu. Numerické derivování (formule založené na derivaci interpolačního polynomu a a rozvoji do Taylorovy řady), numerické integrování (kvadraturní formule, stupeň přesnosti a chyba, Gaussovy kvadraturní formule, Newtonovy-Cotesovy kvadraturní formule, složené kvadraturní formule).