Kapitola 4

Historický vývoj teorie množin

1 Vývoj pojmu nekonečno.

Dílo B. Bolzana

Co dobře začíná — špatně skončí.
Co špatně začíná — skončí ještě hůř.
PUDDERŮV ZÁKON

Teorie množin je dnes základem, na němž je vystavěna převážná část současné matematiky. Přes náročnost a vysokou abstraktnost této teorie jsou její základní pojmy natolik věrným odrazem reality, že jsou již zahrnuty i do učiva základní školy. Je proto do jisté míry překvapující, že se teorie množin jakožto samostatná matematická disciplína začala formovat až v 70. letech minulého století v díle vynikajícího německého matematika Georga Cantora. V této kapitole se budeme zabývat historií teorie množin a důsledky této teorie pro vývoj matematiky ve 20. století.

Vzhledem k tomu, že teorie množin vznikla především z potřeby vyrovnat se s problematikou **nekonečna**, připomeneme nejprve, jak se vyvíjely představy matematiků a filozofů v tomto směru.

Aktuální a potenciální nekonečno

Často podléháme klamnému dojmu, že lidské poznatky se rozvíjejí „přímočaře“: přidáváme pouze nové a nové poznatky k těm dřívějším, víme toho stále „více a více“. Své představy podsouváme našim předkům a mnohdy si vůbec neuvědomujeme, že leckteré naše „samozřejmosti“ ani zdaleka nemusely být „samozřejmé“ v minulosti.

Na základní škole dětem říkáme, že množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je nekonečná (a nikdo se nad tím nepozastaví), všichni samozřejmě víme, že bodů na úsečce je nekonečně mnoho (a navíc jsme zjistili, že je jich „více“ než přirozených čísel, protože je jich *nespočetně* mnoho, zatím co $\mathbb{N}$ je pouze *spočetná*). I malé děti chápou, že přímka nemá žádný konec a při pohledu na večerní oblohu přímo „cítíme“ nekonečno vesmíru, který nás obklopuje. Málokdo si přitom uvědomuje, že po dlouhá staletí, dokonce ještě v minulém století, bylo všechno jinak.

Vraťme se v našich úvahách do starého Řecka, kde se formovaly základy moderní vědy včetně matematiky. S pojmem „nekonečno“ samozřejmě starořečtí filosofové běžně pracovali. Byli si však dobře vědomi problémů, které jsou s tímto pojmem spojeny.[1] Postupně vykrystalizoval dvojí přístup k nekonečnu. Místo dlouhého teoretického popisu tyto přístupy ilustrujme na jednoduchém příkladu.

Samozřejmě, že již staří Řekové dobře věděli, že přirozených čísel

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

je nekonečně mnoho. Tuto skutečnost však můžeme popsat a chápat dvěma způsoby.

Budeme-li postupně psát přirozená čísla, **nikdy** je nevypíšeme všechna. Za každým číslem následuje další, jakoukoliv předem stanovenou mez dříve nebo později překročíme. Takto chápané nekonečno popisující **proces**, který nikdy neskončí, mez, které nikdy nedosáhneme, to je tzv. *potenciální nekonečno*.

My dnes však, pod vlivem vývoje, který trvá již několik desetiletí, chápeme nekonečnost systému přirozených čísel jinak: díváme se na množinu $\mathbb{N}$ jako kdybychom ji „viděli“ hotovou, stavíme se do pozice, kterou Řekové přenechali bohům a která nebyla určena lidskému zkoumání. Nekonečné množiny si představujeme jako završené a zkoumáme bez obav vlastnosti těchto systémů. Tomuto nekonečnu, chápanému v završené, definitivní formě, se říká *aktuální nekonečno*.

Z řady důvodů věcných i filozofických dospěli Řekové — jak jsme již naznačili — k tomu, že lidskému zkoumání je přístupné pouze nekonečno potenciální. Proto když Eukleidés ve 3. století př. Kr. hovoří o *přímce*, má na mysli úsečku, kterou může „neomezeně“ prodlužovat, nikdy ji však nemůže prodloužit „do nekonečna“, jak si to dnes představujeme my. Z téhož důvodu formuluje Eukleidés tvrzení o počtu prvočísel tak, že *jich je více než jakékoliv předem dané množství*, neboť věděl a uměl dokázat, že jich není jen konečně mnoho. Nemohl však říci, že jich je „nekonečně mnoho“, protože to by musel připustit aktuální nekonečno, tvářit se, že vidí množinu všech prvočísel *hotovou*, *dokončenou*.

A proto také, abychom nezůstali jen u příkladů z matematiky, byl vesmír v antickém Řecku **konečný**. Za nejvzdálenější sférou stálic nebylo nic a nikoho nenapadalo klást si otázku,

[1] Za mnohé uveďme Zénóna z Eleje, který proslulými *aporiemi*, z nichž nejznámější je *Achilleus a želva*, dokazoval nemožnost pohybu. Všechny aporie využívaly představy nekonečné dělitelnosti prostoru, respektive času.

kterou si my, navyklí již nekonečnu aktuálnímu, snad ani nedovedeme nepoložit: *co je* **za** *onou poslední sférou?* Krása jejich vesmíru spočívala v jeho **konečnosti**, v řádu, který odpovídal jejich představám o harmonii světa.

Vývoj pojmu nekonečno

Chápání nekonečna, které se vyvinulo v antice, se udrželo dlouhá staletí. Lidskému poznávání bylo dáno nekonečno potenciální a myšlenka na aktuální nekonečno se jevila jako nepatřičná a člověku nepříslušející. Až velký raně renesanční myslitel Mikuláš Kusánský si jako jeden z prvních troufá rozvíjet myšlenku, co by to znamenalo, **kdyby** byl vesmír nekonečný. Jeho myšlenky však byly příliš odvážné a ojedinělé.

Jen nesměle se v myšlenkách vědců rodily otázky, které nám dnes připadají samozřejmé, především pak ta, která v 70. letech 19. století koneckonců stála u zrodu teorie množin: *má vůbec smysl porovnávat nekonečné systémy podle velikosti?* Tuto otázku si například v roce 1638 položil jeden z géniů oné doby, Galileo Galilei. Ten si vypsal dvě řady čísel:
přirozená čísla

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

a jejich druhé mocniny

$$1, 4, 6, 16, 25, \dots$$

a uvědomil si, dnešní terminologií řečeno, že mezi těmito množinami **existuje bijekce!** To by však mělo znamenat, že uvedené systémy čísel jsou **stejně velké!** A to se, vcelku zákonitě, Galileimu jevilo jako naprostý nesmysl. Vždyť přece jeden ze základních Eukleidových logických axiómů, které byly nezpochybnitelným pilířem tehdejší matematiky, říká, že *celek je větší než část*. A tady se zdá, že by druhý systém, který je evidentní částí prvního, měl být stejně velký.

Jaký závěr z této „absurdní“ situace Galilei vyvodil? **Pro nekonečné systémy nemá otázka o jejich velikosti naprosto žádný smysl!**

Takový tedy byl stav úvah o nekonečnu zhruba v polovině 17. století. A záhy se měla celá situace ještě více zkomplikovat. Uvažovalo-li se zatím o (potenciálně) **nekonečně velkých** veličinách, ve druhé polovině 17. století se situace ještě více zdramatizovala.

Jak je všeobecně známo, vzniká v této době *diferenciální a integrální počet*. Přestože jeho tvůrci Gottfried Wilhelm Leibniz a Isaac Newton přistoupili k jeho výstavbě z odlišných pozic, byl infinitesimální počet u obou založen na pojmu **nekonečně malé** veličiny. Jakkoliv tento pojem nebyl řádně definován a pravidla pro počítání s nekonečně malými veličinami byla dána jen velmi vágně, ukázalo se záhy, že diferenciální a integrální počet je vskutku mocným nástrojem nejen v matematice, ale i v řadě aplikací, především pak ve fyzice. Nejasnosti v jeho základech se však postupně vyhrocovaly a posléze v 18. století vyústily ve stav, který dnes nazýváme *druhou krizí matematiky*.

Problémy matematické analýzy se postupně odstraňovaly až od počátku 19. století. Zásadní roli zde sehrál Augustin Louis Cauchy zavedením **limity** na počátku dvacátých let, významně však do této problematiky zasáhl svými pracemi z matematické analýzy i Bolzano.[2]

Dospěli jsme tak v tomto stručném přehledu do období, v němž Bolzano píše své dílo *Paradoxy nekonečna*, které nás v souvislosti s teorií množin mimořádně zajímá.

Zrekapitulujeme-li tedy stav v polovině 19. století, lze říci následující: vědecká komunita pracuje s potenciálním nekonečnem a odmítá nekonečno aktuální jako něco, co není přístupno lidskému zkoumání. V matematické analýze již sice existují nástroje k odstranění problémů s „nekonečně malými“ veličinami, přesto však v matematické, fyzikální a další literatuře přetrvávají nesprávné a nelogické postupy, které člověka s tak kritickým a analytickým myšlením, jaké měl Bolzano, musely zákonitě vyprovokovat k formulaci svého náhledu na problematiku nekonečna.

B. Bolzano a „Paradoxy nekonečna“

Paradoxy nekonečna, nejznámější Bolzanova kniha, vyšly v roce 1851, tři roky po jeho smrti. Bolzano ji psal poslední dva roky před smrtí, v letech 1847 – 1848, a tak ji lze v mnoha ohledech považovat za vyvrcholení a uzavření jeho díla.

Jakkoliv si Bolzano sám ze svých knih nejvíce cenil monumentální čtyřdílné učebnice logiky a metodologie vědy *Wissenschaftlehre* (v českém překladu *Vědosloví*), ovlivnily právě *Paradoxy nekonečna* další vývoj matematiky ze všech jeho děl nejvýrazněji. Podstatnou měrou k tomu samozřejmě přispěla i ta skutečnost, že rukopis nestihl osud mnoha jeho dalších děl, která zůstala ležet v nezpracované pozůstalosti dlouhá desetiletí. Bolzanův žák, František Příhonský, jenž po Bolzanově smrti rukopis obdržel se žádostí o přípravu do tisku, se tohoto úkolu vskutku obětavě a zodpovědně ujal a tak v roce 1851 mohly *Paradoxy* v Lipsku opravdu vyjít.[3]

Paradoxy nekonečna přitom nejsou ryze matematickou knihou. Jde spíše o dílo matematicko-filozofické, v němž je značná pozornost věnována i fyzice, lépe řečeno fyzikálnímu nazírání na svět, teologii apod. Bezesporu však je skutečností, jak v dalším ukážeme, že právě „matematické“ pasáže knihy patří k těm pozoruhodnějším.

Sledujeme-li vývoj hodnocení Bolzanova přínosu ke světové matematice, vypozorujeme záhy dva obvyklé extrémy: od přehlížení k nekritickému nadsazování a k podsouvání myšlenek a úmyslů, které Bolzano prokazatelně neměl. Jak v dalším uvedeme, hlavní Bolzanův přínos

[2]Poznamenejme, že tento proces zpřesňování matematické analýzy dovršil ve 2. polovině 19. století Karl Weierstrass zavedením tzv. „$\epsilon - \delta$ jazyka“. V rámci těchto snah byla v 70. letech minulého století řádně zavedena *reálná čísla* G. Cantorem a Richardem Dedekindem. V systému reálných čísel již samozřejmě nemohou existovat žádné „nekonečně malé“ veličiny.

[3]Jak známo, Bolzano psal své práce německy nebo latinsky. Originální název německy psaných *Paradoxů* je *Paradoxien des Unendlichen*. Česky vyšly *Paradoxy nekonečna* až v roce 1963 (!) v zasvěceném překladu Otakara Zicha, který knihu doprovodil podrobnými poznámkami a komentářem. Z tohoto překladu také v dalším textu citujeme.

lze spatřovat v těch myšlenkových proudech, které za zhruba čtvrt století vyvrcholily vznikem **teorie množin**. Zakladatel této teorie, Georg Cantor, *Paradoxy* dobře znal a vysoce je hodnotil.[4] V této souvislosti se často píše o Bolzanovi jako o spoluzakladateli teorie množin, což je poněkud nadsazené a někdy se dokonce objevují evidentní nesprávnosti. Tak například jeden z nejznámějších historiků matematiky, Dirk Struik, píše, že Bolzano dospěl k pojmu spočetné a nespočetné množiny, což je naprostá nepravda.

Pokusme se tedy objektivně zhodnotit faktický přínos *Paradoxů nekonečna*. Ty jsou ostatně natolik významné a v mnoha ohledech dodnes inspirativní, že ani v nejmenším nepotřebují nekritické a přehnané hodnocení k tomu, aby byly poprávu považovány za jedno z nejvýznamnějších děl matematické literatury minulého století.

Obsah Paradoxů nekonečna

Jak jsme již uvedli, nejsou *Paradoxy* ryze matematickou knihou, ale dílem, v němž se prolínají pasáže matematické, fyzikální, filozofické a teologické. Kdybychom se stručně snažili vystihnout základní myšlenky celého díla, byly by to asi dvě následující:

1. zdůvodnění, proč je v matematice **nutno** pracovat i s aktuálním nekonečnem;

2. analýza chyb, jichž se vědci dopouštějí při úvahách o nekonečnu.

První z uvedených myšlenek Bolzano zdůraznil již mottem celé knihy, za něž si zvolil následující Leibnizův citát: *Jsem natolik pro aktuální nekonečno, že namísto abych připustil, že se ho příroda děsí, jak se běžně říká, jsem přesvědčen, že je má v oblibě všude, aby lépe zdůraznila dokonalosti svého Tvůrce.*[5] Celá práce[6] je rozdělena do 70 paragrafů. I přečtení obsahu, v němž jsou jednotlivé paragrafy stručně charakterizovány, dá čtenáři alespoň hrubou orientaci o obsahu práce. Současně se však může stát zdrojem omylů a dezinterpretací podobných Struikovu omylu, o němž jsme se zmínili před chvílí. Například §19 má „název“ *Existují nekonečné množiny, které jsou větší nebo menší než jiné nekonečné množiny.* To by mohlo vskutku evokovat dojem, že Bolzano dospěl k něčemu, co připomíná pojem *kardinální číslo* a odtud je pak jen krůček k tomu podsouvat mu „objevení“ spočetných a nespočetných množin. Jak v dalším uvedeme, je podstata úplně jiná; Bolzano pouze v této pasáži dokumentuje, že například jedna úsečka (obsahující nekonečně mnoho bodů) může být částí jiné, větší úsečky apod. K pojmu „kardinální číslo“, jak rovněž uvidíme, Bolzano ani v náznaku nedospěl.

---

[4] V práci *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **21**(1883) o nich píše jako o „skvělém a obsažném díle“.

[5] Z terminologického hlediska je přitom zajímavé, že Bolzano v celé knize sám **ani jednou** neužije pojmu „aktuální“, resp. „potenciální“ nekonečno. Z celého jeho textu je evidentní, že aktuální nekonečno považoval za tak samozřejmé, že nepotřebovalo žádný přívlastek. Naopak, potenciální nekonečno dle něho žádným faktickým nekonečnem není, což v různých obměnách mnohokrát opisuje.

[6] Bolzanův text, bez poznámkového aparátu překladatele, má v českém překladu 100 stran.

Všimněme si nyní konečně obsahu *Paradoxů* systematicky a podrobněji.

Prvních deset paragrafů tvoří stručný Bolzanův výklad toho, jak je nutno chápat pojem „nekonečný souhrn“; v naší dnešní terminologii je to nekonečná množina. Tato část dnešnímu čtenáři připadne zcela samozřejmá a argumentaci jistě přijme bez problémů, neboť je s aktuálním nekonečnem zvyklý zcela běžně pracovat. Následující pasáže knihy jsou polemikou a kritikou názorů některých filozofů a matematiků. Ocitujme některé pasáže z 11. a 12. paragrafu; v nich lze snadno vystopovat Bolzanův vztah k potenciálnímu nekonečnu. (Poznamenejme v této souvislosti, že například Cauchyho zmiňuje Bolzano ve své práci několikrát, vždy však v souvislostech poněkud nelichotivých. V pozdějších úvahách o matematické analýze, kde by odvolání se na Cauchyho bylo zcela na místě, se o něm zato nezmiňuje vůbec. Analogicky lze vystopovat i jeho „náklonnost“ k některým filosofům, například k Hegelovi.)

§11

> Tímto nekonečnem, tak dobře známým matematikům, nelze však ještě uspokojit některé filosofy, zvláště novější doby, jako **Hegela** a jeho přívržence, kteří je pohrdavě nazývají špatným nekonečnem a tvrdí, že znají ještě mnohem vyšší, pravé, **kvalitativní nekonečno**, které nacházejí zejména v bohu a vůbec jen v **absolutnu**. Jestliže si myslí, jako Hegel, Erdmann a jiní, matematické nekonečno pouze jako veličinu, která je proměnná a jejíž růst nemá žádnou hranici (což ovšem mnozí matematikové, jak brzo uvidíme, stanovili jako výměr svého pojmu), pak s nimi souhlasím, když kritizují tento pojem jako veličinu do nekonečna pouze **rostoucí**, nikdy však nekonečna **nedosahující.** . . .

§12

> Nevidím však také jinou možnost, než zamítnout jako nesprávné i jiné výměry nekonečna, jež byly podány samotnými matematiky v domnění, že představují jenom součásti tohoto jednoho a téhož pojmu.
>
> 1. Vskutku byli někteří matematikové přesvědčeni, jak jsem právě výše poznamenal, mezi nimi sám **Cauchy** (ve svém **Cours d’Analyse** a mnoha jiných spisech), autor článku **„Nekonečno“ v Klügelově** slovníku, že definují nekonečno, jestliže je popíší jako proměnnou veličinu, jejíž hodnota **neomezeně** roste a podle toho může být větší než **jakákoli sebe větší daná veličina.** Mezí tohoto neomezeného růstu je **nekonečně velká veličina**. Tak je tangenta pravého úhlu, myšlená jako spojitá veličina, neomezená, bez konce, **ve vlastním slova smyslu nekonečná**. Chybnost tohoto výměru vysvítá již z toho, že co nazývají matematikové **proměnnou veličinou**, není vlastně veličina, nýbrž pouhý pojem, pouhá **představa** veličiny, a to taková představa, která v sobě pojímá nejen jednu jedinou veličinu, nýbrž dokonce nekonečně mnoho veličin, které se navzájem liší

> ve své hodnotě, tj. ve své **velikosti**. To, co nazýváme nekonečným, nejsou ony **různé** hodnoty, které tu představuje výraz tangens φ, zvolený jako příklad, pro různé hodnoty φ, nýbrž pouze ona jediná hodnota, o níž si představují (ač v tomto případě neprávem), že jí onen výraz nabývá při hodnotě $\varphi = \pi/2$. Je v tom jistě také protimluv, mluví-li se o mezi neomezeného růstu a právě tak, mluví-li se při výměru nekonečně malého o mezi neomezeného ubývání. A prohlásí-li se ona první mez za nekonečnou veličinu: pak by se měla podle analogie tato druhá, tj. pouhá nula (nic) prohlásit za nekonečně malé: což je jistě nesprávné a ani **Cauchy** ani **Grunert** si to nedovolují říci.
>
> 2. Byl-li právě uvedený výměr příliš široký, je naproti tomu příliš úzký onen výměr, který přijímá Spinoza a mnoho jiných, jak filozofů, tak matematiků, a to že **nekonečné je pouze to, co není schopno žádného zvětšení**, nebo k čemu již nelze nic připojit (přičíst). Matematik si dovoluje připojit ke každé veličině, i k nekonečně velké, jiné veličiny, a to nejen konečné, nýbrž i jiné veličiny, které jsou samy nekonečné, ba dokonce znásobuje nekonečnou veličinu nekonečně-krát atd. A vedou-li ještě někteří spory o tom, zda je takový postup přípustný: který matematik, jen když nezavrhne jakékoli nekonečno, nebude musit uznat, že délka přímky, omezené jen v jednom směru a prostírající se v druhém směru do nekonečna, je nekonečně velká a že může být nicméně v onom prvním směru prodloužena? . . . .

V dalším si Bolzano všímá problematiky existence aktuálně nekonečných souhrnů, tj. nekonečných množin a vyvrací některé nejobvyklejší námitky proti jejich existenci. Otázky existence nekonečných množin se týká celý §13. Protože je argumentace v této části pro Bolzana v mnoha ohledech typická, ocitujeme jej celý.

Z obsáhlého §14 ocitujeme jen úvodní část, v níž Bolzano vyvrací některé námitky odpůrců aktuálního nekonečna. Přesně tytéž námitky se ovšem opakovaly o několik desetiletí později, kdy byly vznášeny proti Cantorově teorii.

§13

> Jestliže jsme se již shodli v tom, který pojem budeme vázat se slovem **nekonečno**, a jestliže jsme si také již jasně uvědomili části, z nichž tento pojem skládáme: pak je nejbližší otázka, má-li též **předmětnost**, tj. zda jsou také věci, na něž se dá aplikovat, zda existují množiny, které smíme nazývat nekonečnými ve vyloženém významu toho slova. A na toto si troufám rozhodně odpovědět kladně. Nepochybně existují množiny, které jsou nekonečné, již **v oblasti těch věcí, které si nečiní nárok na skutečnost, ba ani na možnost. Množina vět a pravd o sobě** je nekonečná, jak se dá velice snadno nahlédnout; neboť vezmeme-li jakoukoli pravdu, například větu, že vůbec existují pravdy, nebo ostatně jakoukoli jinou

větu, kterou označíme A; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy **„A je pravdivé“** je odlišná od A sama; neboť tato věta má zřejmě zcela jiný subjekt než ona první. Jejím subjektem je totiž celá věta A sama. Avšak podle téhož zákona, podle něhož z věty A vyvozujeme větu od ní odlišnou, kterou nazvu B, dá se opět z B vyvodit třetí věta C, a tak stále bez konce. Souhrn všech těchto vět, kde každá následující je k nejblíže předcházející ve vztahu právě uvedeném, vezme totiž předcházející větu za svůj subjekt a vysloví o něm, že je pravdivou větou, tento souhrn — říkám — zahrnuje množinu částí (vět), která je větší, než jakákoli konečná množina. Neboť i bez mého upozornění si všimne čtenář podobnosti, kterou má řada těchto vět, sestrojená podle právě uvedeného vytvořujícího zákona, s **řadou číselnou**, o níž se uvažovalo v §8; podobnost spočívá v tom, že ke každému členu této druhé řady existuje odpovídající člen předchozí řady tak, že k jakémukoli sebe většímu jejich počtu existuje stejně velký počet různých vět, a že nad to můžeme ještě vždy tvořit nové věty, nebo, lépe řečeno, ža takové věty samy o sobě existují, ať již je tvoříme nebo ne. Z toho pak plyne, že souhrnu všech těchto vět přísluší množství, které převyšuje libovolné číslo, tj. nekonečné množství.

§14

Jakkoli jednoduchý a jasný je právě podaný důkaz: přece je značný počet učených a velmi bystrých mužů, kteří samu větu, o níž věřím, že jsem ji tu dokázal, prohlašují nejen za paradoxní, nýbrž dokonce za falešnou. Popírají, že **existuje vůbec nějaké nekonečno**. Nejen mezi věcmi, které jsou skutečné, ale ani mezi ostatními není podle jejich tvrzení ani jediná, a rovněž tak ani souhrn více věcí, u níž by se dala z nějakého hlediska předpokládat nekonečná množina částí. O důvodech, které uvádějí proti nekonečnu v říši skutečna, budeme uvažovat později, protože také teprve později podáme důvody pro existenci takového nekonečna. Zde tedy vyslechněme pouze důvody, jimiž má být prokázáno, že něco nekonečného není nikde, ani u těch věcí, které si činí nárok na skutečnost.

1. „Nekonečná množina“ říká se, „nemůže již proto existovat, protože nekonečná množina **nemůže být nikdy sjednocena v celek, nemůže být nikdy myšlením obsáhnuta**.“ — Toto tvrzení musím označit přímo za omyl, který byl vyvolán nesprávným názorem, že k tomu, abychom si mohli myslit celek, sestávající z předmětů $a, b, c, d, \ldots$ musili bychom si nejprve o každém z nich vytvořit představu, která představuje každý z těchto předmětů zvlášť (jednotlivé jejich představy). Tak tomu naprosto není: mohu si myslit množinu, souhrn, či chceme-li raději obyvatele Prahy nebo Pekinu jako **celek**, aniž bychom představovali každého z těchto obyvatel jednotlivě, tj. aniž bych měl představu, která se

> vztahuje výhradně jen k němu. Činím to skutečně právě nyní, mluvím-li o této množině obyvatel a vyslovím-li např. soud, že jejich počet je v Praze mezi čísly 100 000 a 120 000. Je totiž zcela snadné, mám-li představu *A*, která reprezentuje každý z předmětů a,b,c,d,. . . , ale již nic jiného, dospět k představě **souhrnu**, utvořeného všemi těmito předměty. K tomu není vskutku zapotřebí ničeho jiného, než spojit s představou *A* pojem, který je označen slovem souhrn, tak jak to naznačují slova: **souhrn všech A**. Touto jedinou poznámkou, jejíž správnost musí být každému zřejmá, jak jsem přesvědčen, padá celá obtíž, kterou hledají v pojmu množiny sestávající z nekonečně mnoha částí: pokud jen tu je rodový pojem, který zahrnuje každou z těchto částí, jinak však nic jiného, jak tomu je u pojmu: „**množina všech vět nebo pravd o sobě**“, kde není použito žádného jiného rodového pojmu než toho, který tu již máme, totiž: „věta nebo pravda o sobě“. — Nemohu však ponechat bez kritiky ještě **druhý** omyl, který se v uvedené námitce prozrazuje.
>
> Je to názor, že „ množina by nebyla, kdyby tu dříve nebyl někdo, kdo si ji myslí“. Kdo tvrdí toto, měl by nejen tvrdit, že neexistuje žádná **nekonečná** množina vět anebo pravd o sobě, aby tak byl důsledný, pokud je to vůbec při omylu možné, ale měl by tvrdit, že neexistují **vůbec žádné** věty a pravdy o sobě. Neboť jestliže si již jasně uvědomili pojem vět a pravd o sobě a nepochybujeme opravdu vůbec o jejich předmětnosti: můžeme jen ztěžka dospěti k tvrzením, že by množina nebyla bez někoho, kdo si ji myslí, avšak jistě u nich nesetrváme. Abych to každému jasně ukázal, dovolím si nadhodit otázku, zda se též na zemských pólech nevyskytují tělesa, tekutá i tuhá, vzduch, voda, kameny atd., zda tato tělesa na sebe navzájem nepůsobí podle určitých zákonů, např. tak, že rychlosti, které si navzájem sdělují při srážce, se mají k sobě v obráceném poměru jejich hmot apod., a zda se toto vše neděje i když tam není ani člověk, ani jiná myslící bytost, aby to pozoroval?. . .

Při čtení Bolzanova textu nás okamžitě napadá řada otázek. Jak Bolzano sám upozorňuje, nabízí se evidentní analogie jím popisované množiny vět s množinou všech přirozených čísel. Proč tedy vůbec onu konstrukci uvádí a nepopisuje přímo množinu přirozených čísel? Aniž bychom chtěli Bolzanovi podsouvat nepodložené domněnky, tkví zřejmě odpověď v odlišném chápání „existence“ čísel a pravd.[7]

Podstatnější námitka je následující: popsaná konstrukce vět přece popisuje *potenciální* nekonečno. Uvedená konstrukce přece nikdy nekončí, tak jako nekončí posloupnost přirozených čísel! Této námitky si Bolzano samozřejmě byl vědom, odpověď však nabídl již v §11. Tam totiž uvádí:

[7] Jak uvádí ve *Vědosloví*, alespoň jedna pravda nepochybně existuje: je to pravda o existenci Boží.

Říkám tedy: nazývám Boha nekonečným, poněvadž mu musíme přiznat síly více než jednoho druhu, které mají nekonečnou velikost. Tak mu musíme připsat poznávací schopnost, která je pravou vševědoucností, tedy obsáhne nekonečnou množinu pravd, protože je v sobě obsáhne vůbec všechny, atd.

Popsaná množina pravd je tedy podle Bolzana **aktuálně nekonečná**, protože **Bůh je všechny vidí**.

Konečně poslední námitka, o níž se chceme zmínit: ačkoliv Bolzano v úvodu paragrafu píše o „předmětnosti“ nekonečna, je jeho příklad z oblasti, kterou sám nazývá „věcmi, které si nečiní nárok na skutečnost“. O tom, že se nekonečno (a jak jsme se již zmínili, znamená to u něj vždy aktuální nekonečno) vyskytuje i v „oblasti samého skutečna“, se Bolzano zmiňuje až mnohem později, v §25. Zde uvedené příklady však, po pravdě řečeno, nejsou příliš přesvědčivé. Kromě již očekávaného argumentu, že *existuje bůh, bytost která je více než v jednom ohledu nekonečná* . . . , je to jen argument založený na představě časového kontinua: *množina stavů, kterých každá bytost během sebekratší doby nabývá, musí být nekonečně velká (nebot' každá taková doba obsahuje nekonečně mnoho okamžiků).*

Nyní se dostáváme k nejzajímavějším — alespoň pro matematiky — pasážím knihy. Uveďme klíčové pasáže §§19-21, kde jsou prokazatelné úvahy, které předjímají vznik teorie množin. V §19 Bolzano nejprve zdůvodňuje, že i nekonečné množiny má smysl porovnávat podle velikosti, v dalších dvou paragrafech pak uvažuje o kritériu, které by nám to umožňovalo. Komentář k těmto úvahám uvedeme až po citaci.

§19

> Již u těch příkladů nekonečna, o kterých jsme dosud uvažovali, nám nemohlo uniknout, že není možno pokládat všechny nekonečné množiny **za sobě rovné z hlediska jejich množství;** ale že mnohá z nich je **větší** nebo **menší** než jiná, tj. obsahuje v sobě jinou množinu jako svůj díl (nebo naopak, je sama obsažena v jiné jako její pouhý díl). I to je tvrzení, které zní mnoha lidem **paradoxně**. Jistěže všichni, kteří vykládají nekonečno jako to, co není schopno žádného zvětšení, musí nejen uznat za paradoxní, ale přímo za **sporné**, že by jedno nekonečno bylo větší než jiné. Avšak poznali jsme již dříve, že tento názor spočívá na takovém pojmu nekonečna, který vůbec nesouhlasí s jazykovým užitím toho slova. Podle našeho výkladu, který odpovídá nejen jazykovému užití, nýbrž i účelům vědy, nemůže najít nikdo nic sporného, ba ani nápadného, na myšlence, že jedna nekonečná množina je větší než jiná. . . .

Domníváme se, že Bolzanova úvaha je zcela jednoznačně čitelná. Jsou-li dvě množiny ve vztahu inkluze, je samozřejmě jedna menší a druhá větší. (Což samozřejmě **není pravda** v cantorovské teorii množin. Už tento fakt, dle našeho názoru, evidentně znamená, že Bolzana

nelze považovat za spoluzakladatele Cantorovy teorie). Problém tedy podle Bolzana nastává, máme-li porovnat velikosti dvou množin, které ve vztahu inkluze nejsou. Ocitujme nejprve Bolzanovu úvahu.

§20

> Přejděme nyní k úvaze o nanejvýš pozoruhodné zvláštnosti, jež se může vyskytnout u vztahu dvou množin, **jsou-li obě nekonečné**, dokonce jež se vlastně vyskytuje vždy, avšak byla dosud přehlížena ke škodě pro poznání mnohých důležitých pravd metafyzických, jakož i fyzikálních a matematických, a která i nyní, vyřknu-li ji, bude pokládána za tak paradoxní, že by bylo velmi potřebné se při úvaze o ní trochu déle zdržet. Tvrdím totiž: dvě množiny, obě nekonečné, mohou být k sobě v takovém vztahu, že je **na jedné straně** možno spojit ve dvojici každou věc, náležející jedné z nich, s věcí, náležející druhé z nich, tak, aby vůbec žádná věc v obou množinách nezůstala bez spojení ve dvojici a také žádná aby se nevyskytovala ve dvou nebo více dvojicích; a přitom je **na druhé straně** možno, aby jedna z obou množin obsahovala druhou jako svůj pouhý díl, takže množství, která ony množiny představují, jsou k sobě **v nejrozmanitějších poměrech**, považujeme-li věci v nich za stejné, tj. za jednotky.. . .

Bolzano tedy uvádí fakt, jehož si povšiml již Galilei: **nekonečná množina může být ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou**. Na rozdíl od Galileiho, který za této situace usoudil, že u nekonečných množin nemá smysl poměřovat jejich velikost, je Bolzano přesvědčen, že to nutné je. Domníváme se však, že v této chvíli se dopustil **osudového omylu**, který způsobil, že se nestal faktickým zakladatelem teorie množin. Jak z následujícího paragrafu uvidíme, usoudil, že existence bijekce mezi nekonečnými množinami nás ještě neopravňuje k tvrzení, že jsou stejně velké.[8] Jednoduše řečeno, Bolzano překročil mnohé dosavadní bariéry, evidentně však nepřesáhl horizont tvrzení, že *celek musí být větší než část.* Z následujícího textu je to zcela zřejmé.

§21

> Tedy jen z toho důvodu, že dvě množiny A a B jsou v takovém vzájemném vztahu, že ke každé části a, obsažené v A, můžeme též vyhledat podle určitého pravidla část b, obsaženou v B, tak aby všechny dvojice $(a+b)$, které vytvoříme, obsahovaly každý předmět z A nebo z B, a každý pouze jednou – jen z této okolnosti — jak vidíme — není ještě nijak dovoleno uzavírat, že by si **tyto množiny** z hlediska

[8]Jak víme, vyřešil tuto věc definitivně až o čtvrt století později Cantor, když dokázal, že mezi přirozenými a reálnými čísly **bijekce neexistuje**, takže lze existenci bijekce vzít za kritérium toho, zda jsou množiny **stejně velké**.

> množství svých částí byly **navzájem rovny** (tj. abstrahujeme-li od všech jejich rozdílů), **jsou-li nekonečné**; nýbrž mohou být přes tento svůj vztah, který je sám o sobě ovšem obapolně stejný, ve vztahu nerovnosti vzhledem ke svým množstvím, takže se může ukázat, že jedna z nich je celkem, jehož dílem je druhá. Na rovnost těchto množství se smí usoudit teprve tehdy, přistoupí-li k tomu ještě nějaký jiný důvod, jako například to, že obě množiny mají zcela stejná základní určení, například zcela stejný způsob vzniku.

Formulaci, že dvě množiny jsou stejně velké, když mají „zcela stejná základní určení“ sice Bolzano opakuje vícekrát, nikde však neprecizuje, co tím přesně myslí.

Okomentovali jsme tedy podrobně Bolzanovy úvahy, které byly předobrazem teorie množin. Přitom se domníváme, že právě v uvedených 21 prvních paragrafech jsou ukryty nejhodnotnější myšlenky celého díla. Přes veškeré (z dnešního hlediska viděné) nedostatky bylo Bolzanovou velkou zásluhou především fundované zdůvodnění nutnosti zkoumat aktuální nekonečno. O dalších pasážích *Paradoxů* se již zmíníme jen stručně.

Dalších cca 20 paragrafů se zabývá počítáním s „nekonečně malými“ a „nekonečně velkými“ veličinami v analýze a v geometrii. Stručně řečeno, Bolzano zde podává výklad toho, jak počítat s limitou (i když tohoto pojmu ani jednou neužije) a tím se vyhnout užívání nekonečně malých či velkých veličin. Zvláštní pozornost věnuje problémům spojeným s nulou, kterou nepovažuje za číslo, ale pouze za symbol, přičemž přesně specifikuje, jak lze tohoto symbolu užívat. Zhruba druhá polovina knihy je věnována úvahám o prostoru, čase, fyzikálních zákonech, o duchovních a hmotných substancích apod. Síla těchto pasáží je ve srovnání s matematickými partiemi podstatně menší. Některé Bolzanovy názory byly evidentně překonané již v době, kdy svou práci psal. Stručně řečeno, Bolzano zastává divnou směs tzv. mechanického materialismu kombinovaného s vírou v boží všemohoucnost. Ze stavu všech součástí vesmíru bychom mohli podle platných zákonů rekonstruovat stavy další, pokud ovšem *pomineme případ, kdy nastane přímý boží zásah, protože odchylka od tohoto zákona vyžaduje sílu, která by ve srovnání se spojitou silou musila být* **nekonečně velká** apod. Tělesa mohou podle Bolzana na sebe působit „bezprostředně na dálku“, a všechny tyto úvahy jsou prostoupeny dobovými úvahami o éteru a nedělitelných atomech. I v těchto partiích lze sice najít hodnotné myšlenky (například o „dimensi prostoru“, kterou Bolzano zavedl již ve svých dřívějších pracích), celkově je však vyznění této části knihy, byť je čtivá a poutavá, mnohem nižší.

Co říci závěrem? Bolzanova kniha je v mnoha ohledech pozoruhodná. Samozřejmě, že ve světle dalších objevů jsou některé pasáže nepřesné či zastaralé. V každém případě je to však dílo pozoruhodné a podává nám dobrý obrázek o pronikavosti Bolzanova ducha a o stavu vědeckého myšlení v polovině minulého století. O kterém současném textu to asi bude možno bez obav říci za půldruhé století?

2 Georg Cantor a jeho dílo

Historie je věda o tom,
co se nikdy nestane dvakrát.
VALERYHO ZÁKON

Viděli jsme, jak blízko byl Bolzano k odhalení a pochopení vlastností nekonečných množin. To, co se nám dnes ovšem jeví jako malý krůček v poznání, byl v tehdejší době — v polovině 19. století — velký myšlenkový posun, kvalitativní skok v matematickém a filozofickém myšlení. Učinit tento krok — to vyžadovalo hluboké matematické vzdělání, široký filozofický rozhled, bohatou tvůrčí fantazii a velkou osobní odvahu. Tím vším byl vrchovatě obdařen Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, jak se plným jménem jmenoval vynikající německý matematik, jenž je v celém světě zaslouženě uznáván za zakladatele teorie množin; teorie, která tak výrazně ovlivnila tvář soudobé matematiky, teorie, proti níž byly vedeny v matematických kruzích tak ostré boje a nevybíravé výpady jako proti málokteré jiné matematické disciplíně, které se však na přelomu 19. a 20. století dostalo prakticky všeobecného uznání a která se stala základnou téměř veškeré moderní matematiky. Zhroucení matematiky vystavěné na Cantorově teorii na počátku 20. století (budeme o něm podrobně hovořit v §3), které tak dramaticky poznamenalo vývoj matematiky ve 20. století, ani v nejmenším nesnižuje význam Cantorovy role v dějinách světové matematiky.

G. Cantor se narodil v r. 1845 v Petrohradě, kde jeho otec vedl až do r. 1856 obchodní firmu. Malý Georg od malička tíhnul k matematice a přes počáteční otcův odpor ji také (současně s fyzikou a filozofií) studoval v Curychu, Göttingen a především v Berlíně, kde r. 1867 promoval. Největší vliv ze všech učitelů na něj měl Karl Weierstrass, který také patřil k těm nemnoha matematikům, u nichž našel Cantor i v nejtěžších chvílích oporu. Od r. 1869 až do r. 1913 působil Cantor na univerzitě v Halle.

Od studentských let projevoval vynikající nadání; koncem 60. let napsal řadu prací z teorie čísel, algebry a teorie funkcí. Jeho nejplodnějším životním obdobím však byla léta 1873 – 1884, v nichž geniálním způsobem položil základy teorie množin a po obsahové stránce tuto teorii vybudoval prakticky do dnešní podoby.

Při studiu trigonometrických řad dokázal v r. 1873 nespočetnost množiny všech reálných čísel (v práci *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* – tj. *O jedné vlastnosti souhrnu všech reálných algebraických čísel*; tato práce byla publikována v r. 1874). Je to jeho první práce s množinovou tématikou. (Překlad této práce dále uvádíme.) V sérii dalších prací z uvedeného období zavedl pojem mohutnosti množiny a vybudoval teorii kardinálních a ordinálních čísel.

Proti teorii množin byly od počátku vznášeny četné výhrady. Hlavní námitky byly vznášeny proti tomu, jak se v ní pracuje s aktuálně nekonečnými množinami; řada matematiků nikdy nepochopila hloubku a dosah Cantorova učení. V čele tohoto proticantorovského tažení byl až do své smrti bývalý Cantorův berlínský učitel Leopold Kronecker. Cantor měl četné problémy s uveřejňováním svých prací, byl napadán a jeho dílo bylo znevažováno. Skutečných přátel a zastánců měl jen nemnoho. Kromě Weierstrasse to byl především již zmiňovaný R. Dedekind, s nímž Cantora pojilo od r. 1872, kdy se víceméně náhodně ve Švýcarsku seznámili, dlouholeté přátelství. (Ze zachované korespondence mezi nimi lze dobře vysledovat, jak oboustranně plodné bylo toto přátelství prudkého bouřlivého „romantika“ Cantora a suchého střízlivého „klasika“ Dedekinda.)

Úporná práce, dílčí neúspěchy při řešení některých problémů, spojených především s „hypotézou kontinua“ a neustálé útoky jeho odpůrců však vykonaly své. V r. 1884 podléhá Cantor prudké depresi, musí být léčen na nervové klinice a vážně uvažuje o tom, že matematiky zcela zanechá. Od té doby se u něho střídají období tvůrčí práce s depresivními stavy. V r. 1897, tedy v době, kdy jeho teorie konečně dochází všeobecného uznání, publikuje Cantor svou poslední práci. V roce 1899 se ještě na krátký čas vrací k tvůrčí práci, aby se pak již definitivně odmlčel. V r. 1905 končí svou přednáškovou činnost, v r. 1913 odchází z univerzity a v r. 1918 v psychiatrické léčebně umírá.

Nebyl to lehký život, co Georg Cantor prožil. V mnoha směrech byl podobný osudu jiných géniů v historii lidské vědy a kultury. Jednou provždy však zůstane zapsán v dějinách lidského poznávání, neboť to byl on, kdo nám zpřístupnil krásný a tajuplný svět — svět nekonečných množin.

Ukázky z Cantorova díla

Nejprve uvedeme již zmiňovanou práci z r. 1874. Jak jsme již napsali, je to ve světové matematické literatuře první práce týkající se teorie množin (byť pojem „množina“ — německy „die Menge“ — se v ní vůbec nevyskytuje). (Cantor hovoří jen o „souhrnu“ čísel — tak překládáme výraz „Inbegriff“. Pojem „množina“ se vůbec poprvé vyskytuje až v jeho práci z r. 1879.) Stejně tak se v práci nevyskytují pojmy „spočetný“, respektive „nespočetný“. Přesto je tu však učiněn rozhodující krok — krok, který Bolzano, jak jsme viděli, možná tušil, ale neudělal; máme zde na mysli důkaz faktu, že existují dvě neekvivalentní nekonečné množiny. Tato skutečnost byla pro Cantora odrazovým můstkem k vybudování teorie kardinálních čísel.

O jedné vlastnosti souhrnu všech reálných algebraických čísel

Reálným algebraickým číslem obecně rozumíme reálnou veličinu ω, která vyhovuje neidentické rovnici tvaru

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

kde $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. Můžeme zde přitom bez újmy na obecnosti předpokládat, že čísla n a a_0 jsou kladná, koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nemají společného dělitele a rovnost (1) je nerozložitelná. Za těchto předpokladů bude zaručeno, že podle známých základních aritmetických a algebraických pravidel je rovnost (1), jíž vyhovuje nějaké reálné algebraické číslo, plně určena. Obráceně, každé rovnici tvaru (1) přísluší nejvýše tolik reálných algebraických čísel ω, které jí vyhovují, kolik činí její stupeň n. Reálná algebraická čísla tvoří jako celek souhrn veličin, který označíme (ω). Jak je jednoduše vidět, má tento systém tu vlastnost, že v každém okolí jakéhokoliv myšleného čísla α leží nekonečně mnoho čísel z (ω). O to nápadnější proto na první pohled může být skutečnost, že souhrn (ω) může být jednoznačně přiřazen souhrnu (ν) všech celých kladných čísel tak, že každému algebraickému číslu ω přísluší jisté celé kladné číslo a naopak, každému celému číslu ν odpovídá plně určené reálné algebraické číslo ω, tak, že jinými slovy řečeno, souhrn (ω) si můžeme představit ve tvaru nekonečné zákonitě utvořené řady

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots , \tag{2}$$

v níž se vyskytnou všechny prvky z (ω) a každý z nich přitom na určitém místě v (2), přičemž toto místo je dáno příslušným indexem. Jakmile nalezneme zákonitost, podle níž je toto přiřazení prováděno, je možno ji libovolně modifikovat. Bude tudíž postačovat, když v §1 uvedu to přiřazovací pravidlo, které, jak se domnívám, je nejjednodušší.

Této vlastnosti souhrnu všech reálných algebraických čísel využiji k tomu, abych pomocí §1 v §2 ukázal, že když utvoříme libovolnou řadu reálných čísel veličin tvaru (2), můžeme určit v každém zadaném intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ číslo η, které nebude obsaženo v (2). Kombinací výsledků těchto dvou paragrafů podáme nový důkaz dřívějšího Liouvilleova tvrzení, že v každém zadaném intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ leží nekonečně mnoho transcendentních, tj. nealgebraických čísel. Dále uvedeme v §2 Větu jako základ k zdůvodnění toho, proč souhrn reálných veličin, které tvoří kontinuum (jako reálná čísla, která jsou ≥ 0 a ≤ 1) nelze jednoznačně přiřadit souhrnu (ν). Tak najdeme zřetelný rozdíl mezi tak zvaným kontinuem a souhrnem utvořeným ze všech reálných algebraických čísel.

§1.

Vraťme se k rovnici (1), které vyhovuje algebraické číslo ω a která je za uvedených předpokladů plně určena. Zvětšeme číslo $n - 1$, kde n je stupeň čísla ω, o součet absolutních hodnot koeficientů uvedené rovnice a označme výsledek N;

N nazveme výškou čísla ω. Při použití obvyklého označení tedy platí

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \tag{3}$$

Výška N je podle toho pro každé reálné algebraické číslo ω jisté kladné celé číslo; obráceně, ke každé kladné celočíselné hodnotě N existuje jen konečně mnoho algebraických reálných čísel o výšce N; jejich počet označme $\varphi(N)$. Je například $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Nyní čísla souhrnu (ω), tj. algebraická reálná čísla, postupně uspořádáme do řady tak, že nejprve vezmeme číslo ω_1 jako jediné číslo o výšce 1; poté vezmeme následující $\varphi(2) = 2$ algebraická reálná čísla o výšce 2 a označme je ω_2, ω_3. K těmto můžeme připojit $\varphi(3) = 4$ čísla o výšce $N = 3$ tak, aby jejich velikosti vzrůstaly. Obecně můžeme tímto způsobem očíslovat všechna čísla z (ω) až do určité výšky $N = N_1$, rozmístit je na určená místa a za ně připojit reálná algebraická čísla o výšce $N = N_1 + 1$ a sice tak, aby jejich velikosti vzrůstaly. Takto obdržíme souhrn (ω) všech reálných algebraických čísel ve tvaru

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

a s ohledem na dané uspořádání můžeme hovořit o ν-tém reálném algebraickém čísle, přičemž není opomenuto žádné z čísel souhrnu (ω).

§2.

Je-li dána jakýmkoliv způsobem utvořená nekonečná řada navzájem různých reálných veličin

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \ , \tag{4}$$

lze v každém zadaném intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ určit číslo η (a tedy nekonečně mnoho takových čísel), které se nevyskytuje v řadě (4). Toto tvrzení nyní dokážeme. Mějme tedy libovolně zadaný interval $(\alpha \ldots \beta)$ takový, že $\alpha < \beta$. První dvě čísla naší řady (4), která leží uvnitř tohoto intervalu (z něhož vyloučíme hranici) můžeme označit α', β' tak, že $\alpha' < \beta'$. Stejně tak označme první dvě čísla z naší řady, která leží uvnitř $(\alpha' \ldots \beta')$ jako α'', β'' a to tak, že $a'' < \beta''$; podle téhož pravidla utvoříme následující interval $(\alpha'' \ldots \beta'')$ atd. Zde uvedená čísla $\alpha', \alpha'' \ldots$ jsou podle definice jistá čísla naší řady (4), jejichž velikosti se monotónně mění a totéž platí o číslech $\beta', \beta'' \ldots$; velikost čísel $a', \alpha'', \ldots$ neustále roste, velikost čísel $\beta', \beta'', \ldots$ klesá. Každý z intervalů $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, $\ldots$ v sobě uzavírá všechny následující. — Jsou tedy nyní myslitelné dvě možnosti. Buďto je počet takto utvořených intervalů konečný; poslední z nich nechť je $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$. Protože uvnitř tohoto intervalu může ležet nejvýše jedno číslo řady (4), můžeme v tomto intervalu zvolit číslo η, které není ve (4) obsaženo. V tomto případě je věta dokázána.

Nebo je počet utvořených intervalů nekonečně velký. Pak ale mají čísla $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots,$ vzhledem k tomu, že jejich velikosti neustále rostou aniž by rostly do nekonečna, jistou horní závoru α^∞. Totéž platí pro čísla $\beta, \beta', \beta'', \ldots,$ jejichž velikosti klesají; jejich závoru označme β^∞. Je-li $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (což je případ, který vždy nastane v případě souhrnu (ω) všech reálných algebraických čísel), lze se lehce přesvědčit, podíváme-li se nazpět na definici intervalu, že číslo $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nemůže být v naší řadě obsaženo. (Kdyby totiž bylo číslo η v naší řadě obsaženo, měli bychom $\eta = \omega_p$, kde p je jistý index. To však není možné, protože ω_p neleží uvnitř intervalu $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, zatímco číslo η podle definice uvnitř tohoto intervalu leží.) Je-li však $\alpha^\infty < \beta^\infty$, pak žádné číslo η z vnitřku intervalu $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ nebo též hranice tohoto intervalu, pokud jen odpovídá uvedeným požadavkům, není v řadě (4) obsaženo. Tvrzení dokázaná v tomto odstavci nám umožňují různá zobecnění, z nichž zvolíme následující: „Je-li $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ konečná nebo nekonečná řada vzájemně lineárně nezávislých čísel (takže není splněna žádná rovnice tvaru $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = 0$ s celočíselnými koeficienty, které nejsou všechny nulové) a je-li dán souhrn (Ω) všech takových čísel Ω, která lze určit pomocí racionálních funkcí s celočíselnými koeficienty z daných čísel ω, pak v každém intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ existuje nekonečně mnoho čísel, která nejsou v (Ω) obsažena.“ Skutečně, můžeme se podobně jako v §1 přesvědčit, že souhrn (Ω) lze seřadit do tvaru

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu, \ldots ,$$

z čehož, vzhledem k §2, plyne správnost tvrzení.

★ ★ ★

Druhou Cantorovou prací, kterou zde v překladu uvedeme, je článek uveřejněný v r. 1890. V této krátké stati se poprvé objevuje známá důkazová metoda, dnes běžně nazývaná *Cantorova diagonální metoda*. Vyjádřeno v řeči kardinálních čísel je zde dokázáno, že $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ a poté je ukázáno, že zcela analogicky lze pro *každé* kardinální číslo odvodit $2^m > m$.

Povšimněme si, že ani v této práci se nevyskytuje pojem „množina“, i když v této době již Cantor toto pojmenování v jiných pracích užíval.

O jedné elementární otázce z nauky o souhrnech

V práci nazvané: *O jedné vlastnosti souhrnu všech reálných algebraických čísel* (Journ. Math. Bd. **77**, S. 258) se poprvé nachází důkaz věty, že existují souhrny, které nelze, byť jsou nekonečné, jednoznačně přiřadit souhrnu všech konečných celých čísel $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ nebo, jak říkáme, které nemají mohutnost číselné řady $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$. Z toho, co jsme tam dokázali v §2, okamžitě plyne, že například systém všech reálných čísel ležících v libovolném intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ nelze sestavit do řady tvaru

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots .$$

Toto tvrzení však lze dokázat mnohem jednodušeji, nezávisle na vlastnostech iracionálních čísel.

Jsou-li totiž m a w dva navzájem rozdílné objekty, můžeme studovat souhrn M prvků tvaru

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

které závisí na nekonečně mnoha souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots,$ kde každá z těchto souřadnic je buďto m nebo w.

K prvkům M patří například tři následující:

$E^I = (m, m, m, m, \ldots),$

$E^{II} = (w, w, w, w, \ldots),$

$E^{III} = (m, w, m, w, \ldots).$

Nyní tvrdím, že takový systém M nemá mohutnost řady $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$.

Plyne to z následující věty:

Je-li $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ jakákoliv jednoduchá nekonečná řada prvků systému M, pak existuje prvek E_0 z M, který není žádným z prvků E_ν.

K důkazu nechť je

$$\begin{array}{l} E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots), \\ E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Tato $a_{\mu,\nu}$ jsou zde buďto m nebo w. Buď nyní řada $b_1, b_2, , \ldots, b_\nu, \ldots$ definována tak, že b_ν bude rovněž rovno m nebo w a přitom různé od $a_{\nu,\nu}$.

Je-li tedy $a_{\nu,\nu} = m$, nechť je $b_\nu = w$ a je-li $a_{\nu,\nu} = w$, nechť $b_\nu = m$.

Povšimneme-li si nyní prvku

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

z M, vidíme okamžitě, že rovnost $E_0 = E_\mu$ nemůže být splněna pro žádné celé číslo μ. Kdyby totiž pro jisté μ a pro všechny hodnoty ν platilo

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

pak by zejména platilo

$$b_\mu = a_{\mu,\mu},$$

což je podle definice čísla b_ν vyloučeno.

Z této věty bezprostředně plyne, že souhrn všech prvků z M nelze seřadit do tvaru řady $E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots$; dostali bychom totiž spor, že E_0 by současně bylo i nebylo prvkem M.

Tento důkaz překvapuje nejen svou velkou jednoduchostí, ale zejména tím, že princip v něm uvedený lze bezprostředně použít k důkazu obecnějšího tvrzení, že totiž mohutnosti systémů nemají maximum, což je totéž jako tvrzení, že ke každému zadanému systému L existuje jiný systém M, který má větší mohutnost než L.

Buď například L lineární kontinuum, jako třeba souhrn všech reálných čísel, která jsou ≥ 0 a ≤ 1.

Pod M rozumějme souhrn všech jednoznačných funkcí $f(x)$, které nabývají hodnot 0 nebo 1, přičemž x proběhne všechny reálné hodnoty, které jsou ≥ 0 a ≤ 1.

To, že M nemá menší mohutnost než L, plyne z toho, že v M existují podmnožiny, které mají stejnou mohutnost jako L; například je to podmnožina utvořená z těch funkcí proměnné x, které mají v jednom jediném x_0 z x hodnotu 1 a ve všech ostatních x mají hodnotu 0.

M ale nemá ani stejnou mohutnost jako L. Kdybychom totiž souhrn M mohli jednoznačně popsat pomocí proměnné z, mohli bychom si M představit ve tvaru jednoznačné funkce obou proměnných x a z

$$\varphi(x, z),$$

a to tak, že zadáním z bychom mohli obdržet prvek $f(x) = \varphi(x, z)$ z M a také naopak, každý prvek $f(x)$ z M bychom získali jako $\varphi(x, z)$ jedinou volbou z. Tím však dostáváme spor. Myslíme-li si, že $g(x)$ je ta jednoznačná funkce x, která nabývá jen hodnot 0 a 1 a pro každou hodnotu x je různá od $\varphi(x, z)$, pak je na jedné straně $g(x)$ prvek M, na druhé straně však žádnou volbou $z = z_0$ nemůžeme tuto funkci dostat z $\varphi(x, z)$, neboť $\varphi(x_0, z_0)$ je různé od $g(z_0)$.

Není-li tedy mohutnost systému M ani menší ani rovna mohutnosti L, plyne odtud, že je větší než mohutnost L. (Viz Crelles Journal Bd. **84**, S. 242.)

V práci *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitlehre* (Leipzig 1883) jsem dokázal pomocí zcela jiných metod, že mohutnosti nemají maximum. Dokonce je tam dokázáno, že souhrn všech mohutností, když ho uspořádáme podle velikostí, tvoří „dobře uspořádanou množinu“, takže ve skutečnosti ke každé mohutnosti existuje větší a rovněž ke každé shora neohraničené množině mohutností existuje nějaká mohutnost ještě větší.

„Mohutnosti“ reprezentují jediné a zákonité zobecnění konečných „kardinálních čísel“; nejsou ničím jiným, než aktuálně nekonečně velkými kardinálními čísly a patří jim táž realita a určitost jako těm původním. Jen zákonitosti mezi nimi, nazývané „teorie čísel“, jsou zde částečně odlišné od zákonitostí ve světě „Konečna“.

Další objevy na tomto poli jsou úkolem budoucnosti.

★ ★ ★

Poslední ukázkou z Cantorova díla, kterou uvedeme, bude několik partií z obsáhlé práce *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*, tj. *Příspěvky k základům teorie transfinitních množin*, která je poslední Cantorovou publikovanou prací. (První část vyšla v časopise *Mathematische Annalen* v r. 1895, druhá část tamtéž v r. 1897. Celá práce má 76 stran.) Toto dílo je vynikajícím završením Cantorovy více než dvacetileté práce na výstavbě teorie množin.

V úvodu 1. paragrafu Cantor **poprvé vysvětluje**, co rozumí množinou. (Tato pasáž bývá často a nepřesně citována. Z textu je zřejmé, že ji Cantor zcela jistě **nepokládal** za *definici*, jak bývá často nesprávně uváděno. Pojem samotný na jedné straně podle Cantorových původních představ zjevně pro svou „samozřejmost“ žádnou definici nevyžadoval; na druhé straně v době publikace této práce již Cantor znal těžkosti, k nimž jeho intuitivní přístup vede.) Ve 2. paragrafu Cantor definuje nerovnost mezi kardinálními čísly.

Kromě těchto dvou paragrafů v následující ukázce uvedeme část §4, v němž je zavedeno umocňování kardinálních čísel, část §6, v němž je popsána specifická role čísla $\aleph_0$ a konečně část §15, v němž se hovoří o množině $Z(\aleph_0)$ ordinálních čísel. Čtenář jistě i bez zvláštního upozornění postřehne, že styl vyjadřování a důkazové metody této práce jsou již zcela moderní; §15 by mohl být bez větších úprav — stejně jako další části práce — zařazen i do moderní učebnice.

Rozdíl mezi první Cantorovou množinovou prací a touto poslední je jistě dostatečným svědectvím, jak obrovské dílo Cantor v uvedeném období vykonal.

Příspěvky k základům teorie transfinitních množin

§1.

MOHUTNOSTI ČILI KARDINÁLNÍ ČÍSLA

„Množinou“ rozumíme každý souhrn M určitých rozlišitelných objektů m našeho nazírání nebo našeho myšlení (nazývaných „prvky“ v M) shrnutých v jeden celek. Symbolicky to zapíšeme takto:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Sjednocením více množin $M, N, P, \dots$, které nemají společné prvky, rozumíme množinu označenou

$$(M, N, P, \dots). \tag{2}$$

Prvky této množiny jsou prvky z M, z N, z P atd., brány všechny společně.

„Část“ nebo „podmnožina“ množiny M je každá *jiná* množina M_1, jejíž prvky jsou současně prvky v M.

Je-li M_2 částí M_1 a M_1 částí M, pak je také M_2 částí M.

Každé množině M přísluší jistá „mohutnost“, kterou nazýváme také „kardinální číslo“.

„Mohutností“ nebo „kardinálním číslem“ množiny M rozumíme obecný pojem, který v našem myšlení přiřadíme každé množině M tak, že přitom abstrahujeme od vlastností jejích různých prvků m a od uspořádání při jejich zadávání!

Výsledek této dvojí abstrakce, kardinální číslo čili mohutnost množiny M, označujeme

$$\overline{\overline{M}}. \tag{3}$$

Takto z každého jednotlivého prvku m, nepřihlížíme-li k jeho vlastnostem, vznikne „jednotka“, takže kardinální číslo M samotné je určitá množina utvořená z těchto jednotek, jakožto rozumový odraz projekce dané množiny v naší mysli.

O dvou množinách M a N řekneme, že jsou ekvivalentní, což označíme

$$M \sim N \qquad \text{nebo} \qquad N \sim M, \tag{4}$$

jestliže lze nalézt takové jejich vzájemné přiřazení, že každému prvku z jedné odpovídá při tomto přiřazení jeden a jenom jeden prvek druhé.

Každé části M_1 v M odpovídá tedy jistá ekvivalentní část N_1 z N.

Je-li dáno takové přiřazení dvou ekvivalentních množin, pak lze toto přiřazení (až na případ, že obě množiny jsou jednoprvkové) libovolně modifikovat. Zejména lze zařídit, že danému prvku m_0 z M odpovídá jistý prvek n_0 z N. Jestliže si totiž prvky m_0 a n_0 neodpovídají při původním přiřazení, ale prvku m_0 z M odpovídá prvek n_1 z N a prvku n_0 z N odpovídá prvek m_1 z M, pak pozměníme zadání tak, aby si vzájemně odpovídaly prvky m_0 a n_0 a rovněž tak m_1 a n_1; ostatní prvky pak zůstanou přiřazeny podle původního pravidla. Takto je úkol splněn.

Každá množina je ekvivalentní se sebou samotnou:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Jsou-li dvě množiny ekvivalentní s třetí, pak jsou také vzájemně ekvivalentní:

$$\text{z } M \sim P \text{ a } N \sim P \text{ plyne } M \sim N. \tag{6}$$

Základní význam má nyní skutečnost, že *dvě množiny M a N jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když mají stejné kardinální číslo*:

$$\textit{ze vztahu } M \sim N \textit{ plyne } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}, \tag{7}$$

a

$$\textit{ze vztahu } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \textit{ plyne} M \sim N. \tag{8}$$

Ekvivalence množin tedy tvoří nutné a neklamné kritérium toho, že jejich kardinální čísla jsou stejná.. . .

§2.

„VĚTŠÍ“ a „MENŠÍ“ MEZI MOHUTNOSTMI

Nechť pro dvě množiny M a N s kardinálními čísly $a = \overline{\overline{M}}$ a $b = \overline{\overline{N}}$ jsou splněny následující dvě podmínky:

1) M neobsahuje část ekvivalentní s N,

2) N obsahuje část N_1 takovou, že $N_1 \sim M$.

Pak je především patrno, že tyto podmínky zůstanou splněny, když množiny M a N nahradíme dvěma ekvivalentními M' a N'. Takto je však určen jistý vzájemný vztah mezi kardinálními čísly a, b.

Dále, ekvivalence množin M a N, jakož tedy i rovnost čísel a, b je vyloučena; kdyby platilo $M \sim N$, pak by vzhledem k tomu, že $N_1 \sim M$, také platilo $N_1 \sim N$ a tedy předpoklad $M \sim N$ by nás přivedl k tomu, že existuje část M_1 v M taková, že $M_1 \sim M$ a tedy také $M_1 \sim N$, což je spor s podmínkou 1).

Za třetí, tento vztah mezi čísly a, b je takový, že tentýž vztah mezi b, a není možný. Když tedy v 1) a 2) prohodíme role M a N, obdržíme dvě vzájemně kontradiktorické podmínky.

Vztah mezi a, b charakterizovaný podmínkami 1) a 2) vyjádříme slovy: a je menší než b nebo také b je větší než a; symbolicky

$$a < b \qquad \textit{nebo} \qquad b > a. \tag{1}$$

Lehce lze dokázat, že

$$\textit{když } a < b,\ b < c, \quad \textit{pak také } a < c.$$

Právě tak okamžitě z definice plyne, že když P_1 je část množiny P, pak z $a < \overline{\overline{P_1}}$ plyne také $a < \overline{\overline{P}}$ a ze vztahu $\overline{\overline{P}} < b$ plyne $\overline{\overline{P}}_1 < b$.

Ukázali jsme, že ze tří vztahů

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a$$

každý vylučuje zbývající dva.

Naproti tomu se v žádném případě nerozumí samo sebou, a také bychom to nyní nemohli dokázat, že pro každá dvě kardinální čísla a, b musí nutně nastat některá z uvedených možností.

Teprve později, až přehlédneme rostoucí posloupnost transfinitních kardinálních čísel a poznáme jejich vzájemné vztahy, budeme moci dokázat tvrzení: A. *„Jsou-li a,b libovolná dvě kardinální čísla, pak platí budło $a = b$ nebo $a < b$ nebo $a > b$.“*

§4.

UMOCŇOVÁNÍ MOHUTNOSTÍ

„Pokrytím množiny N prvky množiny M“ nebo stručněji „pokrytím N prvky M“ rozumíme pravidlo, kterým je s každým prvkem n z N svázán jistý prvek z M, přičemž jeden a tentýž prvek z M může být použit i opakovaně. Takto je tedy prvek z M, který je svázán s n, jistou jednoznačnou funkcí n a můžeme ho proto označit $f(n)$. Tuto funkci nazveme „pokrývací funkcí prvků n“. Odpovídající pokrytí množiny N označíme $f(N)$.

Řekneme, že dvě pokrytí $f_1(N)$ a $f_2(N)$ jsou si rovna právě tehdy, když pro všechny prvky n z N platí rovnost

$$f_1(n) = f_2(n); \tag{1}$$

to znamená, že když existuje byť jen jediný prvek $n = n_0$, pro který uvedená rovnost není splněna, pak již považujeme pokrytí $f_1(N)$ a $f_2(N)$ za navzájem různá.

Kupříkladu můžeme, když m_0 je jistý prvek z M, zadat pro všechny n

$$f(n) = m_0.$$

Takto je pak určeno pokrytí N prvky množiny M.

Jiné pokrytí obdržíme, když pro dva různé prvky m_0 a m_1 z M a pro jistý prvek n_0 z N zadáme

$$f(n_0) = m_0, \quad f(n) = m_1$$

pro všechna n různá od n_0.

Souhrn všech rozdílných pokrytí N množinou M tvoří jistou množinu s prvky $f(N)$. Nazveme ji „množinou všech pokrytí N prvky M“ a označíme ji $(N|M)$. Je tedy

$$mm(N|M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Platí-li $M \sim M'$ a $N \sim N'$, pak lze lehce odvodit, že také

$$(N|M) \sim (N'|M'). \tag{3}$$

Kardinální číslo množiny $(N|M)$ tedy závisí jen na kardinálních číslech $\overline{\overline{M}} = a$ a $\overline{\overline{N}} = b$. Můžeme proto definovat mocninu a^b takto:

$$a^b = \overline{\overline{(N|M)}}. \tag{4}$$

§6.

NEJMENŠÍ KARDINÁLNÍ ČÍSLO ALEF NULA

Množiny s konečným kardinálním číslem nazýváme „konečnými množinami“; všechny ostatní množiny nazýváme „transfinitními množinami“ a jejich odpovídající kardinální čísla nazýváme „transfinitními kardinálními čísly“.

Souhrn všech konečných kardinálních čísel ν nám udává následující příklad transfinitní množiny; jí odpovídající kardinální číslo (§1) „alef nula“, symbolicky $\aleph_0$, definujeme vztahem

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

To, že $\aleph_0$ je transfinitní číslo, tj. není rovno žádnému konečnému číslu μ, plyne z té jednoduché skutečnosti, že když přidáme k množině $\{\nu\}$ nějaký nový prvek e_0, je sjednocení $(\{\nu\}, e_0)$ ekvivalentní s původní množinou $\{\nu\}$. Existuje totiž mezi nimi vzájemně jednoznačné přiřazení, při němž prvku e_0 odpovídá první prvek 1 druhé množiny, prvku ν první množiny pak odpovídá prvek $\nu + 1$. Podle §3 tak dostáváme

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

V §5 jsme však dokázali, že (pro konečná μ) je $\mu + 1$ různé od μ, takže $\aleph_0$ není rovno žádnému konečnému číslu μ.

Číslo $\aleph_0$ je větší než všechna konečná čísla μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

Toto plyne okamžitě z §3, neboť $\mu = \overline{\overline{\{1, 2, 3, \dots, \mu\}}}$, žádná část množiny $\{1, 2, 3, \dots, \mu\}$ není ekvivalentní s množinou $\{\nu\}$ a samotná množina $\{1, 2, 3, \dots, \mu\}$ je částí $\{\nu\}$.

Na druhé straně je $\aleph_0$ nejmenší transfinitní kardinální číslo.

Je-li a jakékoliv transfinitní kardinální číslo různé od $\aleph_0$, pak

$$\aleph_0 < a. \tag{4}$$

Toto plyne z následujících vět:

A. *V každé transfinitní množině T existuje podmnožina s kardinálním číslem $\aleph_0$.*

D ů k a z: Odstraníme-li podle nějakého pravidla z T konečný počet prvků $t_1, t_2, \dots, t_{\nu-1}$, zůstane zde pořád možnost odstranit i další prvek t_ν. Množina $\{t_\nu\}$, kde ν je libovolné konečné kardinální číslo, je podmnožinou v T s kardinálním číslem $\aleph_0$, protože $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§1).

B. *Je-li S transfinitní množina s kardinálním číslem $\aleph_0$ a S_1 je transfinitní podmnožina v S, pak je rovněž $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*

§15.

ČÍSLA DRUHÉ ČÍSELNÉ TŘÍDY $Z(\aleph_0)$

Druhá číselná třída $Z(\aleph_0)$ je souhrn $\{\alpha\}$ všech ordinálních typů dobře uspořádaných množin, jejichž kardinální číslo je $\aleph_0$ (§6).

A. Druhá číselná třída obsahuje nejmenší prvek $\omega = \mathrm{Lim}_\nu \nu$.

D ů k a z: Symbolem ω rozumíme typ dobře uspořádané množiny

$$F_0 = (f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots), \tag{1}$$

kde ν probíhá všechna konečná ordinální čísla a

$$f_\nu < f_{\nu+1}. \tag{2}$$

Je tedy (§7)

$$\omega = \overline{F_0} \tag{3}$$

a (§6)

$$\overline{\omega} = \aleph_0. \tag{4}$$

ω je tedy číslo druhé třídy a sice to nejmenší. Je-li γ jakékoliv ordinální číslo $< \omega$, musí být (§14) typem nějakého řezu v F_0. F_0 má však pouze řezy

$$A = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$$

s *konečným* ordinálním číslem ν. Proto platí $\gamma = \nu$.

Neexistuje tedy *transfinitní* ordinální číslo, které by bylo menší než ω, takže ω je nejmenší takové. Podle toho, co jsme uvedli v §14 o $\mathrm{Lim}_\nu \alpha_\nu$ je zřejmě $\omega = \mathrm{Lim}_\nu \nu$.

B. *Je-li α libovolné číslo druhé třídy, pak za ním následuje jako nejbližší větší číslo téže číselné třídy číslo* $\alpha + 1$.

3 Antinomie teorie množin. Třetí krize matematiky

Nikdy není tak zle,
aby nemohlo být ještě hůř.
GATTUSOVO ROZŠÍŘENÍ MURPHYHO ZÁKONA

19. století bylo obdobím prudkého rozvoje přírodních i společenských věd. V řadách vědců řady oborů narůstá uspokojení nad dosaženými výsledky: zdá se jim, že přírodní vědy zmapovaly a popsaly vše podstatné v reálném světě. Zasloužilo by si hlubšího rozboru, čím to bylo způsobeno, že téměř současně — na přelomu 19. a 20. století — dochází v řadě z nich, včetně matematiky, k dramatickému zvratu.

Tak například známý americký fyzik Albert Abraham Michelson, jehož jistě nebudeme podezírat z malého přehledu a nedostatku odbornosti, v roce 1894 prohlašuje:

Důležité základní zákony a fakta ve fyzice již byly všechny objeveny a jsou dnes tak pevně prokázány, že možnost, že by vůbec kdy byly nahrazeny v důsledku nových objevů, je nesmírně vzdálená. . . Naše budoucí objevy je třeba hledat na šestém desetinném místě!

Dva roky poté, v r. 1896, objevuje Antoine Henri Becquerel přirozenou radioaktivitu, v r. 1905 publikuje Albert Einstein speciální teorii relativity (v r. 1916 pak obecnou), ve 20. letech se konstituuje kvantová mechanika atd.: co z fyzikálního obrazu světa z konce 19. století vlastně přetrvalo až do dneška?

Něco podobného se na přelomu století odehrálo i v matematice, s důsledky pro matematiku samotnou asi ještě závažnějšími.

Uváděli jsme již, jak podrážděné reakce vyvolaly první Cantorovy množinové práce. Postupně se však prokázalo, jak mocným a potřebným nástrojem se teorie množin pro matematiku stala. Ke konci 19. století dosáhla teorie množin téměř všeobecného uznání a stala se základnou, na níž byla budována prakticky celá matematika. Všeobecné mínění matematiků té doby vystihuje známý výrok čelného francouzského matematika a fyzika Henri Poincarého, jednoho z vůdčích duchů tehdejšího vědeckého světa, který na II. mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v roce 1900 prohlašuje:

. . . nyní v matematice zůstávají jen celá čísla a konečné, respektive nekonečné systémy celých čísel . . . Matematika je plně aritmetizována. Dnes můžeme říci, že dosáhla absolutní přesnosti.

Je vskutku ironií osudu, že v době, kdy Poincaré tato slova pronášel, už bylo de facto jasné, že teorie oněch „nekonečných systémů celých čísel“, jakožto část teorie množin, má k oné absolutní přesnosti dále než daleko. Antinomie teorie množin, z nichž první již byla tehdy známa, vyvedly matematiky krutě z mylného zdání, že mají k dispozici spolehlivou základnu pro výstavbu svých teorií. A strastiplná cesta za překonáním těchto antinomií, cesta, na jejíž konec matematika dodnes nedorazila, nám ukázala, jak podstatně je nutno revidovat původní představy o možnosti spolehlivého vybudování základů matematiky. (O tom však budeme podrobněji hovořit v §4.) Z tohoto hlediska není označení ***3. krize matematiky*** pro období, které matematika od počátku 20. století prožívá, nijak přehnané.

(Připomeňme si, že *1. krize matematiky* cca v 5. stol. př. n.l. souvisela s objevem iracionálních čísel a se Zenónovými aporiemi o nemožnosti sestrojení konečných veličin z nekonečně mnoha částí. *2. krize matematiky*, jak jsme již uvedli, je spojována s nejasnostmi kolem počítání s nekonečně malými veličinami. Newton a Leibniz při výstavbě infinitesimálního počtu nedovedli tyto operace řádně zdůvodnit. Během doby bylo čím dál nejasnější jak je možné, že nezdůvodněné postupy s přesně nedefinovanými veličinami dávají převážně správné výsledky. Tato krize byla překonána díky práci Cauchyho, Weierstrasse a dalších v 19. století.)

V kapitole I jsme ukázali (viz větu 5.10), že když lze v nějaké teorii dokázat nějaké tvrzení a současně i jeho negaci, lze v této teorii dokázat *každé* tvrzení. Taková teorie je ovšem prakticky bezcenná. Přesně toto se ovšem stalo v Cantorově teorii množin, když se v ní objevily tzv. *antinomie*, někdy též nesprávně nazývané *paradoxy*.

První z těchto antinomií publikoval v r. 1897 italský matematik Cesare Burali-Forti v práci *Una questione sui numeri transfiniti*, Rendiconti Palermo **11**, 154 - 164). Cantor sám znal tuto antinomii již v r. 1895; spočívá v tom, že *ordinální číslo dobře uspořádané množiny všech ordinálních čísel je větší než všechna ordinální čísla* (tzn., že existuje ordinální číslo větší než ono samo). (Srovnej s III. 6.2.)

Po objevení této antinomie bylo ještě možno chovat jistou naději, že ji bude možno nějak odstranit a situaci tedy bude možno zachránit. (Samotný Cantor až do konce života věřil, že jeho teorii bude možno nějak „opravit".) V prvním desetiletí 20. století se však těchto antinomií objevila celá řada; jednoznačně se tak prokázalo, že tato sporná tvrzení se neobjevují jen na „periférii" matematiky a netýkají se jen objektů, bez nichž se lze snadno obejít, ale právě naopak, ukázalo se, že obtíže tkví v podstatě věci a celá teorie množin musí být vybudována na zcela nových základech. Za 80 let, které od té doby uplynuly, ovšem nebylo nalezeno všeobecně přijaté řešení této situace — viz §4.

Nyní podáme stručný přehled nejznámějších antinomií.

Nejznámější je antinomie, kterou v r. 1902 objevil a v r. 1903 publikoval anglický matematik, filozof, logik, sociolog a veřejný činitel, lord Bertrand Russell. (Nezávisle na něm objevil tuto antinomii rovněž Ernst Zermelo. Russellova antinomie spočívá, jak jsme uvedli již v kapitole I, v tom, že když utvoříme „množinu S všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem", vede ke sporu předpoklad $S \in S$ i předpoklad $S \notin S$.

Tato antinomie byla zpopularizována samotným Russellem a mnoha dalšími matematiky. Z celé řady těchto populárních variant uveďme alespoň následující:

Jistý vojín, povoláním holič, dostal od svého velitele příkaz, že musí holit všechny vojáky své čety, kteří se neholí sami a nesmí holit nikoho jiného. Tím se ovšem tento vojín ocitl v neřešitelné situaci, neboť *sám se má holit právě tehdy, když se sám nebude holit*.

V roce 1905 uveřejnil francouzský lékař a matematik — a v té době ředitel Oceánografického muzea v Monaku — Jules Richard *Richardova antinomie*antinomii, v níž vynikajícím způsobem využil (nebo zneužil?) Cantorovy diagonální metody. Nejsnáze lze tuto antinomii zformulovat takto: všech konečných posloupností českých slov (nazvěme tyto posloupnosti „větami") je spočetně mnoho. Některé z těchto vět jednoznačně definují nějaké reálné číslo, například „šest pětin", „nejmenší prvočíslo, které je větší než deset milionů" apod. Množina T všech těchto čísel je spočetná (neboť *všech* vět je pouze spočetně mnoho). Lze tedy množinu T uspořádat do posloupnosti. Nyní Cantorovou diagonální metodou sestrojíme číslo $r \notin T$. To podle definice množiny znamená, že *číslo r nelze definovat žádnou konečnou posloupností českých slov*. To je však zřejmý spor s tím, že *jsme takto číslo r právě definovali*.

Zjednodušením Richardovy antinomie je následující *antinomie Berryho*, kterou poprvé publikoval Russell v r. 1906: protože všech českých „vět" (ve výše uvedeném smyslu), které mají nejvýše 20 slov, je pouze konečně mnoho, existují nutně přirozená čísla, která takovou větou definovat nelze. Můžeme proto vyslovit následující definici:

Buď k nejmenší přirozené číslo, které nelze definovat českou větou o nejvýše dvaceti slovech.

Čtenář nechť si promyslí, co jsme právě udělali: větou o 14 slovech jsme definovali číslo, které nelze definovat **žádnou** větou, která by měla dvacet nebo méně slov!

V literatuře (viz například [5]) lze najít ještě další antinomie. Uvedené ukázky však — doufejme — udávají dostatečný přehled o tom, jakého druhu byla ona tvrzení, která způsobila 3. krizi matematiky.

Pravděpodobně je však nyní nutné podrobněji vysvětlit, *proč* uvedené antinomie nejsou jen zajímavými logickými hříčkami bez hlubšího významu (jak se původně řadě matematiků zdálo a jak na ně ostatně i dnes může pohlížet ten, kdo k matematice přistupuje „pseudoinženýrsky“ jako ke snůšce výpočetních metod), ale závažnými problémy, které zbouraly pracně vybudovanou budovu moderní matematiky a způsobily v matematice dodnes nepřekonanou krizi.

Nešlo jen o to, že se objevila v teorii množin sporná tvrzení, znehodnocující tuto teorii. Horší bylo, že — jak jsme již uvedli — v uvedené době již byla teorie množin základnou převážné části matematiky. (Je zřejmé, že to znamenalo, že teorii množin je nutno buďto „opravit“ nebo najít jinou a „lepší“ základnu. Co by však mělo a mohlo být onou novou základnou? To si prakticky nikdo nedovedl představit. Vynikající německý matematik David Hilbert, o němž budeme ještě hovořit v §4, to v r. 1925 vyjádřil často citovanými slovy: *Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, který pro nás vybudoval Cantor*. (Opravám „cantorovského ráje“ se budeme věnovat v následujícím paragrafu.)

Nejzávažnější důsledky antinomií však spočívaly ještě v něčem jiném. Připomeňme si, jaké bylo východisko Cantorovy teorie. „Množina“ bylo jen synonymum slov souhrn, systém apod. Tento pojem je tak samozřejmý a názorný, že není nutno ho nijak definovat. (Podobně jako je v Eukleidově geometrii zřejmé, co je to bod nebo přímka. Ostatně pojem „množina“ je jistě intuitivně jednodušší než například pojem „přímka“.) O těchto souhrnech — množinách pak Cantor běžně užívanými matematickými a logickými metodami dokazuje tvrzení a odvozuje jejich vlastnosti. (Takto budované teorii se dnes říká „naivní“, respektive „intuitivní“ teorie množin.) Nebylo nejmenšího důvodu předpokládat, že teorie budovaná tímto způsobem by mohla být principiálně nesprávná; vždyť takto se matematika budovala od starověku. A přesto antinomie prokázaly, že matematiku takto bezelstně budovat nelze! Toto je nejzávažnější důsledek antinomií.

A jaký je tedy „správný“ způsob výstavby matematiky? Právě proto, že na odpovědi na tuto otázku se matematikové dodnes neshodli, hovoříme o důsledcích vzniklé situace jako o 3. krizi matematiky.

Tato krize pochopitelně neznamená, že by se matematika ve 20. století nevyvíjela; dobře víme, že je tomu právě naopak. Tato krize samozřejmě ani nemá bezprostřední negativní důsledky na ty matematické disciplíny — a těch je samozřejmě většina — které přímo nesouvisejí s výstavbou základů matematiky. Matematik, který by se však stavěl do pozice, že jeho práce se toto všechno nedotýká, by nápadně připomínal pštrosa, strkajícího hlavu do písku. Jeden z velkých matematiků 20. století, Hermann Weyl, jenž je právě autorem téze o nástupu 3. krize matematiky, tuto situaci charakterizoval v r. 1946 slovy:

Méně než kdykoliv dříve jsme přesvědčeni o prvotních základech logiky a matematiky. Jako všichni a všechno v dnešním světě prožíváme „krizi“. Ta trvá už téměř padesát let. Na první pohled nám nepřekáží v každodenní práci; mohu se však přiznat, že ve skutečnosti měla silný vliv na mou matematickou činnost: směrovala mé zájmy do oblasti, která se mě zdála relativně „bezpečnou“, a neustále ve mně podrývala nadšení a odhodlání nezbytné pro každou vědeckou práci.

4 Východiska z krize

Když se všechno daří,
něco se pokazí.
PRVNÍ CHISHOLMŮV ZÁKON

Jak jsme uvedli v §3, bylo po objevení antinomií teorie množin zřejmé, že dosavadní styl výstavby matematiky je neudržitelný. Přístup matematiků k řešení vzniklé situace byl samozřejmě odlišný podle jejich filozofického i profesionálního zaměření. Přesně definovat a ohraničit jednotlivé myšlenkové proudy je přitom nemožné. V hrubých rysech však lze říci, že základní přístup k řešení byl dvojí: *intuicionistický* a *formalistický*, přičemž mezi formalistické směry patří několik vyhraněných a velmi odlišných skupin.

Podle **intuicionistických** názorů byla matematika v posledních desetiletích budována nepřípustnými metodami. Některá logická pravidla, zřejmě platná pro konečné systémy, jako například *princip vyloučeného třetího* (*tertium non datur* — viz větu 3.15 (2)v kapitole I.), byla nedovoleným způsobem přenesena i na nekonečné systémy. Intuicionisté odmítají aktuální nekonečno, neuznávají existenční důkazy. Objekt, který nelze *zkonstruovat* pomocí jiných uznaných postupů, prostě neexistuje. Je evidentní, že tím před nimi vyvstaly obrovské potíže. Po formální i obsahové stránce byli nuceni prakticky nově budovat řadu matematických disciplín, neboť jen malá část klasické matematiky pro ně byla „přípustná“.

V poslední době sílí tendence dívat se na intuicionismus jako na historickou kuriozitu. Přínos intuicionistů k rozvoji matematiky však byl nemalý. A přinejmenším k zamyšlení by nás měla přimět skutečnost, že mezi ně patřila řada nejvěhlasnějších matematiků posledních generací. První intuicionistické ideje v novodobé matematice lze najít v 70. – 80. letech 19. století v díle Leopolda Kroneckera, o němž již z §2 víme, že stál v čele proticantorovského hnutí. Zrod moderního intuicionismu je však spojován se jménem holandského matematika Leutzena Egberta Jana Brouwera, který základní intuicionistické ideje zformuloval ve své disertační práci v r. 1907. Kromě již zmíněných H. Weyla a H. Poincarého lze k intuicionistům přiřadit například matematiky takového kalibru, jako byli Émile Borel, Henri Leon Lebesgue či Nikolaj Nikolajevič Luzin.

Základní **formalistické** přístupy k výstavbě teorie množin a základům matematiky jsou dvojí: metoda *teorie typů* a *axiomatická výstavba*.

Zakladatelem teorie typů je již několikrát zmiňovaný B. Russell. Podle jeho mínění byly antinomie způsobeny tím, že pomocí všech prvků daného systému byl opět definován prvek daného systému. V teorii typů, kde jsou jednotlivé pojmy „hierarchicky“ rozvrstveny, nemůže být pomocí prvků jisté úrovně definován prvek téže úrovně. Tím je samozřejmě vyloučen vznik antinomií Russellova druhu. Z prací rozvíjejících teorii typů uveďme alespoň dvě nejvýznamnější a nejznámější. Je to především tzv. *New Foundations* amerického matematika Ormana Willarda van Quinea poprvé publikovaná v r. 1937 a dále tzv. *Systém* Σ jiného amerického matematika Hao Wanga, poprvé Wangem popsaný v roce 1954.

Teorie typů bývá často nesprávně zaměňována s jiným filozoficko-matematickým směrem, tzv. *logicismem*. Původ této záměny je jednoduchý — hlavním představitelem logicismu je zakladatel teorie typů Bertrand Russell. Zformulovat hlavní tézi logicismu není jednoduché; vyžadovalo by to zevrubnější rozbor vzájemného vztahu matematiky a matematické logiky. Nepřesně ji lze vyslovit asi následovně: *všechny speciální matematické pojmy lze definovat pomocí slovníku matematické logiky a k důkazům matematických tvrzení není třeba žádných axiómů kromě logických ani žádných odvozovacích pravidel kromě těch, která jsou akceptována logikou.*

Faktickým zakladatelem logicismu byl německý matematik Friedrich Ludwig Gottlob Frege. Jakou ideou byl Frege veden? Poslední čtvrtina 19. století byla obdobím značně úspěšné *aritmetizace matematiky*. (Svědectvím o této skutečnosti je například Poincarého výrok, který jsme citovali v úvodu 3. paragrafu nebo známý výrok Kroneckerův: *Celá čísla stvořil Bůh, vše ostatní je dílem lidí.*) Frege se pokoušel aritmetiku zredukovat na logiku. Jeho dílo zůstalo v době vzniku prakticky nepochopeno. Až Russell na tuto ideu navázal a pokoušel se totéž udělat s Cantorovou teorií množin. Právě při této práci přišel na onu klasickou antinomii nazvanou jeho jménem.

Základním dílem logicismu je třídílná monografie *Principia Mathematica*, kterou v letech 1910 – 1913 vydal Russell společně s anglickým matematikem, filozofem a logikem Alfredem Northem Whiteheadem. Logicismus měl sice značný vliv na rozvoj matematické logiky, mezi matematiky však logicistická redukce matematiky na odnož logiky nikdy nezaznamenala větší ohlas.

Většina matematiků za východisko z krize považovala **axiomatickou výstavbu matematiky**. Dnes je to nejběžnější a nejuznávanější způsob budování matematických teorií. Axiomatické metody již dokonce dávno překročily rámec matematiky samotné a jsou stále hojněji užívány i v jiných vědách, a to nejen přírodních. Proto se o nich zmíníme podrobněji.

Je samozřejmé, že při deduktivní výstavbě nějaké vědecké teorie, kdy složitější pojmy definujeme pomocí pojmů jednodušších a nová tvrzení odvozujeme z tvrzení již dokázaných, není principiálně možno definovat *všechny* pojmy a dokázat *všechna* tvrzení. Na jisté úrovni je nutno započít; jisté tzv. „primitivní“ pojmy je nutno zavést bez definice a jistá tvrzení —

tzv. axiómy — je nutno pokládat za pravdivé bez důkazu. Zásady takové deduktivní výstavby vědy zpracoval již Aristotelés. První — a geniální — takto zpracované matematické dílo jsou Eukleidovy *Základy*.

Nový impuls pro rozvoj axiomatické metody dala opět geometrie. Pokusy o důkaz 5. Eukleidova postulátu o rovnoběžkách, vedoucí — jak známo – až ke vzniku neeukleidovské geometrie, vyvolaly nový zájem o důslednou axiomatizaci geometrie. Tato práce byla završena dílem Davida Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1899), o němž se ještě později zmíníme. A 20. století je obdobím konjunktury axiomatického přístupu k matematice.

Je samozřejmé, že v průběhu doby axiomatické metody zaznamenaly značný vnitřní vývoj. Tento proces lze zhruba rozdělit do tří základních etap:

(a) tradiční axiomatika (Eukleidés);

(b) formální axiomatika (19. století);

(c) formalizovaná axiomatika (20. století).

V čem spočívají hlavní rozdíly mezi axiomatikami jednotlivých období?

Tradiční axiomatika byla popisována v běžném hovorovém jazyce. V tom ovšem bylo potenciálně skryto nebezpečí, že se v takto budované teorii objeví nepřesnosti, nejasnosti nebo dokonce zásadní obtíže; žádný hovorový jazyk není natolik přesný, aby se tomu dalo zabránit. Za druhé, při tradiční axiomatice nejsou přesně zformulována pravidla pro odvozování jedněch výroků z druhých. Při „intuitivně jasném“ odvozování je ovšem vyloučena jednoznačná kontrola správnosti úsudků. Jak prokázaly antinomie, byla především tato okolnost zdrojem těch největších problémů. A konečně, v klasické axiomatice byly axiómy tvrzení, která nebylo nutno dokazovat proto, že byla zcela „samozřejmá“. Teorie byla v tomto slova smyslu budována „sémanticky“.

V dalších dvou etapách vývoje axiomatických metod došlo ve všech uvedených bodech k výrazným změnám. Již ve 2. etapě, při budování formální axiomatiky, dochází mimo jiné k tomu, že:

(a) je dán přesný počet výchozích pojmů a tvrzení;

(b) jsou přesně stanovena odvozovací pravidla;

(c) systém axiómů se mění v souhrn pravidel implicitně určujících, jak je možno pracovat s výchozími pojmy;

(d) proces formální výstavby axiomatického systému je oddělován od jeho možných interpretací (tzv. modelů);

(e) zkoumá se *nezávislost*, *bezespornost* a *úplnost* systémů axiómů (jak o tom hovoříme dále) pomocí modelů daného systému.

Ve třetí, formalizované etapě, dochází navíc k důslednému oddělení jazyka, v němž je daná teorie budována (tzv. „objektový jazyk“) od jazyka užívaného k popisu objektového jazyka (tzv. „metajazyk“). (Řada antinomií právě vznikla záměnou těchto dvou jazyků.) Objektový jazyk je přitom „symbolizován“, tj. na začátku je zadána „abeceda“ (souhrn užívaných symbolů – znaků), jsou udána pravidla, jak tvořit, respektive poznávat správně utvořená „slova“ (nazývaná „formule“) a jsou dána pravidla odvozování jedněch formulí z dalších. Za axiómy jsou pak prohlášeny některé z formulí. Proces oddělení formální výstavby teorie od jejích modelů je takto zcela dovršen. (V uvedeném smyslu je například geometrie vyučovaná na školách pouze jedním z možných modelů axiomatické eukleidovské geometrie.

Podobně je tomu s teorií množin, vyučovanou dnes u nás již od 1. třídy. Již v 1. kapitole jsme ostatně uvedli, že ve školách se de facto učí model **ZF** teorie.)

Ještě než začneme hovořit o axiomatických teoriích množin, stručně k uvedeným požadavkům na volbu axiómů. Ta samozřejmě není předem jednoznačně determinována; volba axiómů je do značné míry věcí libovůle toho, kdo danou teorii vytváří. Jako přirozené se však jevilo požadovat, aby zvolená soustava axiómů byla vždy:

1. **nezávislá** (tzn., že žádný z axiómů nelze odvodit ze zbývajících; takové tvrzení by evidentně nebylo nutno považovat za axióm);

2. **úplná** (tzn., že axiómů je dostatečně mnoho k tomu, abychom mohli každé tvrzení této teorie buďto dokázat nebo vyvrátit — tj. dokázat jeho negaci);

3. **bezesporná** (chceme mít zaručeno, že z axiómů nelze odvodit současně nějaké tvrzení i jeho negaci; víme, že takové teorie je bezcenná).

Nyní je přirozená otázka, zda lze axiomatický systém s uvedenými vlastnostmi sestrojit. (Původně o tom ovšem nenapadlo nikoho pochybovat.)

Relativně nejméně problémů působí nezávislost. Její případné porušení je de facto jen „kosmetickou vadou“ dané teorie a její odstranění není obtížné. Není-li však teorie úplná, je to značně nepříjemné, neboť to značí, že v této teorii nutně existují tvrzení, která nelze ani dokázat, ani vyvrátit. (Zdálo by se ovšem, že tuto obtíž by mělo jít odstranit jednoduše přidáním dalších axiómů.) A není-li teorie bezesporná, je to pro ni naprostá katastrofa. Zatím však, co například pro eukleidovskou geometrii se podařilo úplnost a bezespornost prokázat ve výše uvedené Hilbertově monografii z r. 1899, dokázat úplnost a bezespornost budovaných axiomatických teorií množin se nikomu nepodařilo. To, že se podařilo objasnit, zda lze úplnou a bezespornou teorii množin (a další teorie) sestrojit, patří k největším úspěchům moderní matematiky. Skutečnost, že odpověď je *záporná*, byla jistě překvapující a nepříjemná. Značí totiž výrazné omezení možností axiomatických metod. Podrobněji však budeme o této problematice hovořit v §5.

První úspěšnou axiomatickou teorií množin byla teorie, kterou v letech 1904 - 1908 vybudoval již zmíněný německý matematik Ernst Zermelo. Základní Zermelova idea spočívala v tom, že nelze předpokládat — jak to činil Cantor — že každý souhrn objektů tvoří množinu. Pomocí axiómů je nutno dosáhnout toho, aby množin bylo „dostatečně mnoho“, nikoliv však tolik, aby mohlo docházet k antinomiím. Zermelův systém axiómů později částečně modifikoval a dalšími axiómy doplnil izraelský matematik Abraham A. Fraenkel. *Zermelo-Fraenkelova* teorie množin (nadále ji budeme značit **ZF**) je dnes nejrozšířenější axiomatizovanou množinovou teorií.

Skutečnost, že v rámci **ZF** nelze pracovat se všemi systémy, například se „systémem všech množin“, „systémem všech grup“ a podobně, je však v mnoha ohledech nepříjemná. V roce 1925 však publikoval americký matematik maďarského původu John von Neumann práci, v níž se mu podařilo tuto obtíž obejít. Jeho ideu využil švýcarský matematik Isaak Paul Bernays, který v letech 1937 - 1954 vypracoval vlastní axiomatiku teorie množin (přesněji řečeno „teorie tříd“). Ta je základem tzv. *Gödel-Bernaysovy* teorie tříd (nadále ji značíme **GB**), která vznikla syntézou axiomatiky Bernaysovy a axiomatického systému Kurta Gödela, poprvé publikovaného v r. 1940. (O Gödelovi budeme podrobněji hovořit v §5.)

Zatímco v **ZF** jsou nedefinované pojmy „množina“ a $\in$, jsou to v **GB** pojmy „třída“ a $\in$. Některé axiómy **ZF** jsou současně i axiómy v **GB**. Proto lze řadu množinových pojmů na třídy převést. (Například „obvyklé“ množinové operace apod.) Třídy, které jsou prvkem nějaké jiné třídy, se v **GB** nazývají „množinami“. „Vlastní třídy“ jsou pak ty třídy, které množinami nejsou. Lze dokázat, že množiny ve smyslu **ZF** jsou i množinami ve smyslu **GB** (takže **GB** je vlastně „rozšířením“ **ZF**). Vlastní třídou je například „třída všech množin“. Na rozdíl od množin nemají vlastní třídy například žádné kardinální číslo. (Tuto problematiku jsme probírali v 1. kapitole.)

Podrobnější rozbor role jednotlivých axiómů a přehled dalších axiomatických systémů nebudeme uvádět. Obojí lze nalézt například v již citované knize [5], kde je uveden i obsáhlý přehled další literatury. Pouze o jednom axiómu se pro jeho výjimečné postavení zmíníme podrobněji. Jak čtenář jistě tuší, máme nyní na mysli *axióm výběru*. Tento axióm, jak známo, nám zajišťuje, že k libovolnému systému neprázdných množin existuje množina, která má s každou z těchto množin jednoprvkový průnik.

První — a negativní — zmínku o principu zformulovaném v tomto axiómu lze nalézt v r. 1890 u známého italského matematika Giuseppe Peana v práci *Démostration de l'integrabilité des équations differentielles ordinaires*, Math. Ann. **37**, 182-228. V roce 1902 se o tomto principu zmiňuje další italský matematik Beppo Levi. Intuitivně tohoto axiómu užíval i Cantor, aniž si ovšem uvědomoval, že užívá principu dosud v matematice, respektive v logice neužívaného.

V této souvislosti je zajímavá jedna okolnost. Již v §2 jsme uvedli, jak těžce na Cantora již v r. 1884 doléhaly neúspěchy spojené s hypotézou kontinua. Cantor byl vždy pevně přesvědčen, že každá mohutnost je některým alefem, nikdy se mu však nepodařilo tuto skutečnost dokázat; dnes, po vyřešení hypotézy kontinua, je nám ovšem jasné, proč tomu tak bylo. Jak však v jednom dopise píše Cantorův žák Felix Bernstein — který v r. 1897 jako první dokázal známou větu o ekvivalenci dvou množin, po něm pojmenovanou (věta III. 2.1.) — pokoušel se někdy v r. 1901 společně s Cantorem sestrojit bijekci mezi kontinuem a množinou $Z(\aleph_0)$, která má mohutnost $\aleph_1$. Přitom však narazili na nepřekonatelné těžkosti, které právě Levi navrhoval odstranit pomocí uvedeného principu.

Axióm výběru poprvé explicitně zformuloval E. Zermelo v r. 1904 v práci *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. **59**, 514-516, kde ho užil, jak to ostatně název práce uvádí, k důkazu tvrzení, že každou množinu lze dobře uspořádat. (Tomuto tvrzení se dnes běžně říká Zermelova věta, axióm výběru pak bývá často nazýván *Zermelovým axiómem*.) Řada matematiků vznášela proti axiómu výběru od počátku četné výhrady. (Samozřejmě, že vzhledem ke své nekonstruktivnosti byl zcela nepřijatelný především pro intuicionisty.)

Tyto výhrady se ještě zostřily poté, co Felix Hausdorff pomocí axiómu výběru dokázal tvrzení o paradoxním rozdělení koule; odvodil totiž, že její polovina je kongruentní s její třetinou. (Důkaz tohoto tvrzení je uveden v knize [8], která je první monografií věnovanou teorii množin. Tato kniha měla nesmírný vliv na řadu matematiků a na vývoj těch matematických disciplín, které jsou na teorii množin založené.)

Později dokázali další autoři, především polští matematici Stefan Banach a Alfred Tarski i jiné paradoxní důsledky axiómu výběru. Jak se však záhy prokázalo, zamítnutí tohoto axiómu by na druhé straně způsobilo neskonalé problémy, neboť řadu „běžných“ tvrzení v různých matematických teoriích nelze bez jeho užití prokázat. Poté, co A. Fraenkel v r. 1922 dokázal nezávislost axiómu výběru na ostatních axiómech v běžných teoriích množin a K. Gödel v r. 1938 odvodil jeho bezespornost, se situace víceméně ustálila ve stavu, který trvá dodnes. Axiómu výběru sice užíváme, ale jen tehdy, když je to nezbytné a jeho užití je většinou zdůrazněno.

Jak přívrženci axiomatické výstavby matematiky, tak matematici přiklánějící se k teorii typů, samozřejmě cítili nutnost *dokázat*, že jimi budované teorie jsou *bezesporné*. Klasické metody, použitelné ještě například pro důkaz bezespornosti eukleidovské, respektive neeukleidovské geometrie, však nebyly pro disciplíny operující s aktuálním nekonečnem použitelné. Bylo proto nutné vypracovat k těmto účelům metodu novou. Nejsystematičtěji se tímto úkolem zabýval již několikrát zmiňovaný David Hilbert, autor návrhu dnes všeobecně nazývaného **hilbertovský program**.

První nástin tohoto programu podal Hilbert již v r. 1904, aniž by se jím však dále zabýval. Až v roce 1917, kdy reagoval na neustálé výpady intuicionistů, se k této problematice vrátil a zabýval se jí pak prakticky do své smrti. Zvláště intenzívně se na tomto programu pracovalo v letech 1920 - 1930, kdy s Hilbertem spolupracovala celá řada mladých matematiků; kromě již zmíněných Bernayse a von Neumanna to byli především Wilhelm Ackermann a Jacques Herbrand.

Stručně popišme, jaká byla Hilbertova idea. Vycházel z toho, že je nutno dokázat, že užívané matematické důkazové metody jsou dostatečně silné k tomu, aby jimi bylo možno vybudovat celou klasickou matematiku včetně teorie množin, vycházející přitom z vhodně zvolených axiómů, současně však nejsou natolik silné, aby jejich aplikací bylo možno dojít k antinomiím. (Jak vidět, Hilbert byl skálopevně přesvědčen o správnosti základů klasické matematiky.) Celý tento program měl být realizován ve dvou etapách.

V první etapě měla být matematika, především pak aritmetika, analýza a teorie množin, plně formalizována. Tato formalizace by spočívala v tom, že všechna pravdivá tvrzení, především samozřejmě axiómy, by byla převedena na posloupnosti symbolů zbavených jakéhokoliv obsahu. S těmito posloupnostmi by se pracovalo pomocí jistého počtu přesně definovaných odvozovacích pravidel. Takto — ryze syntakticky — by byla vybudována klasická matematika, přičemž by k této práci nebylo zapotřebí prakticky žádné „intuice“; povolené transformace posloupností by vzhledem k finitnosti všech procesů mohl teoreticky provádět i stroj.

Ve druhé etapě mělo být *dokázáno*, že výše uvedeným způsobem *nelze* nikdy dojít ke spornému tvrzení, například k formuli „1 = 2“. Použité metody přitom musí být natolik jednoduché, aby o jejich správnosti nebylo nejmenších pochyb. Základním požadavkem samozřejmě byla finitnost. (Tuto část, v níž měla být dokázána bezespornost matematiky, nazval Hilbert **metamatematikou**.)

Na uvedeném programu vykonal Hilbert se svými žáky obrovský kus práce. V době, kdy se již zdálo, že celý program by mohl být zdárně ukončen, však výsledky A. Tarského, Alonza Churche a především K. Gödela prokázaly, že hilbertovský program je nerealizovatelný. Jak uvidíme v dalším paragrafu, plyne z Gödelových výsledků nerealizovatelnost 1. i 2. etapy.
Hilbert, který byl ještě po objevení antinomií v Cantorově teorii množin tak pevně přesvědčen o správnosti základů matematiky, že prohlásil: *Předpoklad existence objektivních rozporů ve vnějším světě je klasickým případem nesmyslu*, nesl velmi těžce toto zhroucení svých idejí. Nedlouho před svou smrtí prohlásil: *Kde máme hledat naději a jistotu, když dokonce matematické myšlení selhalo*.

Dnes si sice nemyslíme, že selhalo matematické myšlení, avšak vyrovnat se s Gödelovými výsledky znamenalo podstatně revidovat představy o možnostech formální výstavby matematiky — a nejen matematiky.

5 Gödelovy výsledky

Zákonitě musí jednou nastat
ta nejhorší možná situace.
DRUHÝ SODDŮV ZÁKON

Kurt Gödel, jeden z největších matematiků a logiků moderní éry, se narodil v r. 1906 v Brně, kde absolvoval střední školu. Studoval na univerzitě ve Vídni, kde promoval v r. 1930. V r. 1940 emigroval do USA a až do své smrti v r. 1978 působil v Princetonu (což bylo mimo jiné působiště

A. Einsteina). Dostalo se mu řady poct a uznání; jmenujme za všechny alespoň Einsteinovu cenu za rok 1951, což je nejvyšší americké ocenění vědecké práce. Svými výsledky ovlivnil tvář moderní matematiky jako málokdo jiný.

V poslední době se stalo jistou módou citovat Gödelovy výsledky, zejména proslulou **větu o neúplnosti** z r. 1931 ([9]) i mimo matematiku (většinou samozřejmě nepřesně nebo zcela překrouceně). Vzhledem k mimořádné závažnosti této věty se o ní zmíníme podrobněji. (Mohli bychom samozřejmě uvést původní Gödelovu práci, ale čtenář bez hlubší logické přípravy by pravděpodobně měl s jejím studiem nepřekonatelné potíže. V dalším se proto pokusíme alespoň popsat ideu důkazu, mimochodem geniální a elegantní.)

Předpokládejme, že zkoumáme nějakou axiomatickou teorii $\mathcal{T}$ zahrnující aritmetiku (tj. axiómy aritmetiky jsou tvrzeními v $\mathcal{T}$). Víme, že takovou teorií je například teorie množin.

Jak dobře víme z kapitoly I, výstavba takové formalizované teorie začíná zadáním *abecedy*. Označme abecedu teorie symbolem A. Vzhledem k tomu, že A je konečná nebo spočetná množina (což jistě můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat), existuje jistě prosté zobrazení množiny A do množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Definujme speciálně toto zobrazení tak, že pro každé $\alpha \in A$ je $g(\alpha)$ prvočíslo eventuálně číslo 1.

Nechť je například toto zobrazení definováno takto:

α :	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	(	)	$\forall$	$\exists$	=	$\in$	X	Y	Z	...
$g(\alpha)$:	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	...

Víme, že „slovo“ nad danou abecedou je konečná posloupnost prvků množiny A. Protože je A nejvýše spočetná množina (a samozřejmě neprázdná), je množina S všech slov nad A spočetná. Existuje tedy prosté zobrazení $h\ S \to \mathbb{N}$. Sestrojení této injekce nazýváme „gödelizací“ dané množiny slov.

Abychom ze znalosti čísla $h(\varphi)$ — tzv. „malého Gödelova čísla“ slova φ — mohli snadno zjistit slovo φ, zadáme zobrazení h takto:

$$h(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = 2^{g(\alpha_1)}3^{g(\alpha_2)}\ldots p_n^{g(\alpha_n)}, \quad \text{kde } p_n \text{ je } n\text{-té prvočíslo.}$$

Tak například malé Gödelovo číslo slova $X \in Y$ je $2^{31}3^{29}5^{37}$; obráceně, protože $9000 = 2^3 3^2 5^3$, je 9000 malé Gödelovo číslo slova $\Rightarrow \wedge \Rightarrow$.

Označíme-li G množinu všech malých Gödelových čísel, je zřejmě G vlastní podmnožinou v $\mathbb{N}$. I když je většina těchto čísel nesmírně veliká, lze pro každé přirozené číslo rozhodnout, zda platí $x \in G$ nebo $x \notin G$. Pro dané přirozené číslo x je tedy „$x \in G$“ aritmetické tvrzení.

Víme však, že v teorii $\mathcal{T}$ se nepracuje se všemi slovy, ale jen s tzv. „formulemi“, což jsou slova utvořená podle zadaných pravidel. Například $X \in Y$ je formule v teorii množin, $\Rightarrow \wedge \Rightarrow$ samozřejmě formule není. Označíme-li F množinu všech formulí, je F vlastní podmnožina množiny S.

Množina všech konečných posloupností formulí je spočetná, protože F je nejvýše spočetná. Některé z těchto posloupností — vytvořené podle přesně stanovených pravidel — se nazývají „důkazy“. Označme D množinu všech důkazů.

Je-li $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ důkaz, říkáme, že je to důkaz formule φ_n a o formuli φ_n říkáme, že je *dokazatelná*. (Dokazatelné formule jsou tedy poslední formule v důkazech.)

Je zřejmé, že dokazatelná formule může mít i více důkazů (i když nalezení alespoň některého z nich může být nesmírně obtížné.) Je-li φ libovolná formule, je však zřejmě pravdivé **právě jedno** z následujících dvou tvrzení: „φ je dokazatelná“, respektive „φ není dokazatelná“. (Samozřejmě přitom nemusíme vědět, **které** z těchto tvrzení je pravdivé.)

Je-li $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ důkaz, nazveme jeho „velkým Gödelovým číslem“ číslo

$$2^{h(\varphi_1)} 3^{h(\varphi_2)} \dots p_n^{h(\varphi_n)}.$$

Označme H množinu všech velkých Gödelových čísel. Podobně jako u množiny G je zřejmé, že H je vlastní podmnožina v $\mathbb{N}$ a tvrzení „$x \in H$“ je pro dané přirozené číslo x aritmetické tvrzení.

Je-li $y \in H$ velké Gödelovo číslo důkazu formule φ, jejíž malé Gödelovo číslo $g(\varphi)$ je číslo $x \in G$, řekneme, že „y má konec x“. Je zřejmé, že

„y má konec x“

je aritmetické tvrzení a tudíž ho lze zapsat nějakou formulí v teorii $\mathcal{T}$. Přitom si uvědomme, že pro dané číslo $x \in G$ je tvrzení „$\exists y \in H$ y má konec x“ pravdivé právě tehdy, když je formule s malým Gödelovým číslem x dokazatelná.

Procesem popsané „gödelizace“ dané teorie $\mathcal{T}$ jsme tedy dosáhli toho, že tvrzení o dokazatelnosti formule φ v teorii $\mathcal{T}$ jsme převedli na pravdivost, respektive nepravdivost aritmetického tvrzení „$\exists y \in H$ y má konec $h(\varphi)$“.

Buď nyní $x \in G$ libovolné. Víme, že je buďto pravdivé tvrzení „Formule s malým Gödelovým číslem x je dokazatelná“ nebo tvrzení „Formule s malým Gödelovým číslem x není dokazatelná“.

Je-li například

$$h(\varphi) = 2^{11} 3^{31} 5^{29} 7^{37} 11^{13} 13^{3} 17^{11} 19^{37} 23^{29} 29^{31} 31^{13},$$

je φ formule

$$(X \in Y) \Rightarrow (Y \in X) \; ;$$

protože tato formule evidentně nemůže být v „rozumné“ teorii množin dokazatelná, je aritmetické tvrzení „$\exists y \in H$ y má konec $h(\varphi)$“ v tomto případě nepravdivé.

K. Gödel nyní dokázal následující pozoruhodnou skutečnost: existuje číslo $k \in G$, které má následující vlastnost. Utvoříme-li formuli φ odpovídající tvrzení „Formule s malým Gödelovým číslem k není dokazatelná“, tj. formuli popisující aritmetické tvrzení

„$\neg(\exists y \in H$ y má konec $k)$“ , pak platí $h(\varphi) = k$ (tj. malé Gödelovo číslo takto zkonstruované formule je právě ono číslo k).

Nyní dokážeme, že v teorii $\mathcal{T}$, pokud je bezesporná — a takové teorie samozřejmě chceme budovat — není dokazatelná ani formule φ ani její negace $\neg\varphi$.

(1) Připusťme, že formule φ je dokazatelná. To však znamená, že formuli ψ, jejíž malé Gödelovo číslo je k, nelze dokázat. Touto formulí je však právě formule φ. Obdrželi jsme tedy spor.

(2) Připusťme, že lze dokázat formuli $\neg\varphi$. To však znamená, že lze dokázat skutečnost, že formule s malým Gödelovým číslem k, což je právě φ, je dokazatelná. Opět jsme tedy obdrželi spor.

Je-li tedy $\mathcal{T}$ bezesporná, musí být formule φ v $\mathcal{T}$ „nerozhodnutelná“; nelze dokázat ani φ ani $\neg\varphi$.

Odvodili jsme takto právě *Gödelovu větu o neúplnosti:*

Je-li dána libovolná bezesporná teorie obsahující aritmetiku, pak v této teorii existuje nerozhodnutelné tvrzení.

Na dovršení podivnosti tohoto výsledku si navíc uvědomme, že výše zkonstruovaná nerozhodnutelná formule φ je zjevně **pravdivá**! Uvedli jsme totiž před chvílí, že každé tvrzení o dokazatelnosti nějaké formule v $\mathcal{T}$ je nutně pravdivé nebo nepravdivé. Protože předpoklad, že φ je nepravdivá formule vede okamžitě ke sporu, je φ — i když je nerozhodnutelná — nutně pravdivá.

Jaké jsou důsledky věty o neúplnosti? Protože v každé „dostatečně bohaté“ teorii při jakékoliv volbě axiómů, pokud je jen tato volba bezesporná, existují nutně nerozhodnutelná tvrzení (a situaci nelze spravit přidáním dalších axiómů!), je neuskutečnitelná již 1. etapa hilbertovského programu. Z žádného systému axiómů, pokud je bezesporný, nelze uvažovanými metodami odvodit „celou“ matematiku. (Prvním konkrétním příkladem v teorii množin nerozhodnutelného tvrzení se stala hypotéza kontinua; jak jsme uvedli již v poznámce III.6.23, její nerozhodnutelnost v **ZF** dokázal v r. 1963 Paul Cohen, nezávisle na něm dokázal totéž v **GB** v r. 1964 Petr Vopěnka.)

Z Gödelových výsledků však plyne nerealizovatelnost i 2. etapy hilbertovského programu. Z věty o neúplnosti lze totiž snadno odvodit, že *v teorii s výše uvedenými vlastnostmi nikdy není možno dokázat formuli tvrdící bezespornost této teorie*.

Co odtud plyne pro axiomatické teorie množin (nebo pro axiomatizaci samotné aritmetiky)?

Tyto teorie byly budovány proto, že antinomie prokázaly neudržitelnost cantorovského „intuitivního“ přístupu. Jsou tedy axiomatické teorie bezesporné? Můžeme si být jisti, že v nich nejsou na nějaké jiné úrovni také nějaké antinomie? V to můžeme jen doufat. Jak odvodil K. Gödel, dokázat to nemůžeme. Můžeme odvodit jen relativní tvrzení typu „Je-li **GB** bezesporná, je i **ZF** bezesporná“ a podobně. Je však **GB** bezesporná? Otázka se vrací jako bumerang; v rámci **GB** to nelze dokázat. Jen v rámci nějaké jiné, „bohatší“ teorie by bylo možno eventuelně dokázat, . . . atd.

Že to není příliš optimistické? Alespoň si uvědomíme, že reálný svět je nesrovnatelně složitější, než svět i těch nejlépe vymyšlených formulí. (I když nám jejich vymýšlení — a učení — přináší tolik starostí i potěšení.)