9. Prvočíselná dvojčata

Ve druhé polovině 20. století byly vyřešeny některé slavné problémy, s nimiž se matematikové potýkali mnohdy celá staletí. Již jsme se zmínili, že v r. 1995 byla dokázána tzv. **Velká Fermatova věta** a již dříve byla rozřešena **hypotéza kontinua** a **problém čtyř barev. (***Hypotéza kontinua* byla asi nejslavnějším matematickým problémem 20. století. Týkala se toho, zda existuje množina, která má větší mohutnost než množina všech přirozených čísel, avšak menší než množina všech reálných čísel. V r. 1963 dokázal americký matematik PAUL COHEN, že tuto hypotézu nelze v *Zermelo-Fraenkelově teorii množin* ani dokázat ani vyvrátit. *Problém čtyř barev* z teorie grafů se -- obrazně řečeno -- týkal toho, jaký je nezbytný počet barev, s nimiž vystačíme při vybarvování „jakékoliv" politické mapy tak, že sousední území budou vybarvena rozdílně. Přesná formulace ovšem vyžaduje precizaci uvedených pojmů. V r. 1976 bylo dokázáno, že stačí čtyři barvy. K důkazu bylo zásadním způsobem využito počítačů.)

Přesto dodnes zůstává -- a to i v teorii čísel – mnoho nevyřešených problémů, které odolávají všem pokusům o jejich zdolání. Formulace mnohých z nich je přitom až překvapivě jednoduchá. Zmiňme se tedy na závěr alespoň o některých.

Jak známo, *prvočíselnými dvojčaty* rozumíme prvočísla, jejichž rozdíl je 2. Čtenář si jistě okamžitě vybaví například prvočísla 11, 13 nebo 29, 31. Dobře zapamatovatelná prvočíselná dvojčata jsou například 1 000 000 000 061 a 1 000 000 000 063.

I při hledání nových prvočíselných dvojčat v posledních letech sehrává zásadní roli výpočetní technika. Tak se například v r. 1995 podařilo najít prvočíselná dvojčata

$$570\,918\,348 \times 10^{5\,120} \pm 1,$$

která mají 5129 číslic.

Největší dosud známá prvočíselná dvojčata objevil 17. 1. 1999 francouzský elektroinženýr HENRI LIFSCHITZ. Jsou to čísla

$$361\,700\,055 \times 2^{39\,020} \pm 1,$$

která mají 11 755 cifer.

Přestože se však prvočíselná dvojčata vyskytují prakticky v celém dosud probádaném úseku přirozených čísel, není dodnes známo, zda je jich **konečně** nebo **nekonečně** mnoho. Mezi známými předpověďmi přitom panují značné rozpory, neboť indicie naznačují zcela rozdílné výsledky. Jistou nápovědou by například mohla být následující skutečnost.

Víme, že tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

diverguje, tj. ke každému kladnému číslu A>0 existuje takové přirozené číslo n_0 , že

$$\sum_{n=1}^{n_O}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n_0} > A\ .$$

Dovolme si nyní krátkou odbočku. Skutečnost, že harmonická řada diverguje, je všeobecně známa a sdělení tohoto faktu nechává studenty při přednášce z matematické analýzy zcela chladnými. Při vhodné interpretaci však je tato okolnost přímo „děsivá“.

Představme si úsečku o délce rovné například vzdálenosti naší Země od nejbližší hvězdy mimo naši sluneční soustavu, což -- jak známo -- je více než 4 světelné roky. Divergence harmonické řady znamená, že když začneme tuto úsečku pokrývat postupně úsečkami, z nichž první bude dlouhá 1 mm, druhá 1/2 mm, třetí 1/3 mm atd., pak **konečným** počtem těchto úseček uvedenou vzdálenost k Proximě Centauri pokryjeme.

Kolik by těch úseček ovšem mělo být -- jak za okamžik uvedeme -- nelze dost dobře vůbec vyčíslit. Popisovaný příklad nám však poslouží k dokumentaci dvou na první pohled nesouvisejících faktů. Především si můžeme opětovně uvědomit, jak odvážného kroku se dopouštíme, když ve vyučování běžně a bez rozpaků hovoříme o součtech **celých** nekonečných (například geometrických) řad. Vlastnosti harmonické řady současně dobře ilustrují zcestnost v poslední době častých názorů, že role matematiky klesá, neboť „počítat“ za nás budou počítače a zatěžovat žáky nějakou „teorií“ je tak v podstatě zbytečné. Divergentní řada totiž roste tak „pomalu“, že ani sebelepší počítače dodnes „nepoznají“, že tato řada nemá konečný součet. Žádný dnešní superpočítač nedovede sečíst ani tolik členů, aby dosáhl například mezisoučtu 20. Jinak řečeno, žádný počítač nepozná, že skládáním výše uvedených krátkých úseček může dosáhnou délku 20 mm. Jak by tedy mohl „dohlédnout“ až k nejbližší hvězdě!

Zatím jsme však ani nenaznačili, jak harmonická řada souvisí s problémem prvočíselných dvojčat. Nyní to tedy napravíme.

Vybereme-li z harmonické řady některé členy, může tato vybraná řada divergovat i konvergovat. Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

diverguje, zatím co řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

jak známo konverguje, neboť je to geometrická řada s kvocientem 1/2.
Nyní již můžeme zformulovat jeden významný rozdíl mezi posloupností $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ všech prvočísel a posloupností těch prvočísel, která tvoří prvočíselná dvojčata. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

utvořená pomocí všech prvočísel diverguje. Kdyby divergovala i řada

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\ldots$$

v níž se ve jmenovateli postupně objevují všechna prvočíselná dvojčata, existovalo by samozřejmě prvočíselných dvojčat nekonečně mnoho. Jak však ukázal BRUN, tato řada konverguje. Určit její součet, jemuž se říká *Brunova konstanta*, je velmi obtížné. V r. 1974 určili D. SHANKS a J. W. WRENCH její přibližnou hodnotu 1,902 160 5… , v únoru 1999 ji na hodnotu 1,902 160 582 zpřesnil THOMAS NICELY, který k tomuto zpřesnění využil všech prvočíselných dvojčat až do řádu $1{,}5 \times 10^{15}$. Při těchto výpočtech objevil chybu procesoru Intel Pentium. Tím jen ilustrujeme fakt, který jsme již uvedli: zdánlivě samoúčelná hledání velkých prvočísel a jiné analogické činnosti dnes pomáhají, kromě jiného, i při testování hardwaru a softwaru.
Co lze vydedukovat z konvergence druhé z uvedených řad? Samozřejmě by tato řada měla konečný součet (a tedy konvergovala), pokud by prvočíselných dvojčat bylo pouze konečně mnoho. I kdyby jich však bylo nekonečně mnoho, je zřejmě přechod od všech prvočísel k prvočíselným dvojčatům výraznějším kvalitativním zlomem než přechod od přirozených čísel k prvočíslům.
Jestliže právě uvedený fakt naznačuje, že prvočíselných dvojčat by **mohlo být** pouze konečně mnoho, jiné skutečnosti či hypotézy napovídají opak.
Z tzv. *základní věty o prvočíslech* plyne, že když n je „velké“ přirozené číslo, pak pravděpodobnost toho, že přirozené číslo $1 \leq x \leq n$ je prvočíslem, je

přibližně 1\ ln n . Čím větší je číslo n , tím lepší aproximaci přitom uvedený vztah udává.
(Popsaný vztah předpověděl již v r. 1798 francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752 -- 1833). Důkaz však provedli v r. 1896 nezávisle na sobě belgický matematik Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866 -- 1962) a francouzský matematik Jacques Hadamard (1865 -- 1963).) Na rozdíl od této věty jsou však následující úvahy o prvočíslech pouze **hypotézami**. Tyto hypotézy však byly ověřovány náročnými počítačovými testy, v nichž prozatím dokonale obstály.
Zvolíme-li přirozené číslo x tak, že $1 \le x \le n$, je pravděpodobnost toho, že x i x+2 jsou prvočísla, přibližně $\frac{1}{(\ln n)^2}$. Jinak řečeno, v intervalu <1, n> leží přibližně $\frac{1}{(\ln n)^2}$ dvojic tvořících prvočíselná dvojčata. Jestliže však číslo x z intervalu <1, n> je prvočíslo, stoupne pravděpodobnost toho, že i x+2 je prvočíslo, z hodnoty $\frac{1}{(\ln n)^2}$ na $\frac{n \cdot 1{,}32032\ldots}{(\ln n)^2}$

Přitom platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = \infty \ ,$$

což by zase naznačovalo, že prvočíselných dvojčat je asi nekonečně mnoho.
Jakkoliv jsou tyto úvahy nedokázané, panuje značná shoda mezi jejich předpověďmi a skutečností. V následující tabulce pro zajímavost uvádíme několik intervalů o délce 150 000 . Ve sloupci P je počet předpovězených a ve sloupci N skutečně nalezených prvočíselných dvojčat.

Interval	P	N
100 000 000 - 100 150 000	584	601
1 000 000 000 - 1 000 150 000	461	466
10 000 000 000 - 10 000 150 000	374	389
100 000 000 000 - 100 000 150 000	309	276
1 000 000 000 000 - 100 000 150 000	259	246
10 000 000 000 000 - 10 000 000 150 000	221	208
100 000 000 000 000 - 100 000 000 150 000	191	186
1 000 000 000 000 000 - 1 000 000 000 150 000	166	161