3. Formule pro vyhledávání prvočísel

Přestože je posloupnost všech prvočísel nekonečná, neřekli jsme si zatím nic o tom, jak lze prvočísla vyhledávat, respektive jak je lze postupně „vypočítávat“.

První relativně účinnou metodu pro vyhledávání prvočísel popsal již kolem roku 225 př. Kr. ERATOSTHENÉS Z KYRÉNY (asi 276 př. Kr. -- asi 194 př. Kr.), starořecký matematik a astronom, přítel Archimédův. Tzv. *Eratostenovo síto* spočívá v postupném vyškrtávání násobků přirozených čísel, takže nakonec v takto vzniklém „sítu“ uvíznou jen prvočísla. Tomuto postupu se učí školáci již déle než dva tisíce let. Za zmínku však stojí skutečnost, že je vhodné si toto síto představit napsáno do šesti sloupců. Protože každé prvočíslo větší než 5 je evidentně tvaru $6k+1$ nebo $6k+5$, zůstanou kromě prvního řádku všechna další prvočísla v 1. a 5. sloupci:

-	**2**	**3**		**5**	
7				**11**	
13				**17**	
19				**23**	
				29	
31					
37				**41**	
43				**47**	
				53	
				59	
61					
67				**71**	

Jakkoliv je Eratostenovo síto jednoduché a užitečné, je zřejmé, že k vyhledávání větších prvočísel nám příliš nepomůže. Označíme-li rostoucí posloupnost všech prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_n,$ (a toto označení budeme dodržovat v celém dalším textu), bylo by jistě nejpohodlnější, kdyby existovala taková funkce $f(x)$, že by pro každé přirozené n platilo

$$f(n) = p_n .$$

Potíž je v tom, že takovou formuli dodnes neznáme a dokonce ani nevíme, zda taková formule v „rozumném“ tvaru vůbec existuje.

Když tedy není k dispozici formule, která by umožňovala počítat postupně všechna prvočísla, je přirozené snažit se odvodit takovou formuli

$$g(n) = p_{n_k}$$

že p_{n_k} je rostoucí posloupnost prvočísel, tj. – jinak řečeno – g(n) postupně nabývá stále větších **prvočíselných** hodnot.

O tom, že ani tato úloha není dodnes vyřešena a o zajímavých výsledcích s ní spojených, se zmíníme později.

Nyní se závěrem zmiňme o ještě mírnější úpravě popsaného problému. Neznáme-li funkci g(x), která by v přirozených číslech postupně nabývala prvočíselných hodnot, je přirozené hledat takovou funkci h(x), že funkce h(n) je rostoucí a nabývá „co nejčastěji“ prvočíselných hodnot .

Pozoruhodných výsledků v tomto směru dosáhl především již zmiňovaný LEONHARD EULER. Z řady funkcí s uvedenou vlastností, které nalezl, uveďme jen následující tři polynomy:

$$x^2+x+17, \qquad x^2+x+41, \qquad x^2-79x+1,$$

které nabývají prvočíselných hodnot bez přerušení pro x = 0, 1, ...,15, resp. x = 0, 1, , 39 , resp. x = 0, 1,..., 78.

V jistém smyslu „nejlepší“ z uvedených tří polynomů je druhý nich, který pro hodnoty x = 0, 1, ... , 2 377 nabývá prvočíselných hodnot v polovině případů.