11. Waringův problém

V roce 1770 v práci *Meditationes Algebraicae* napsal anglický matematik a lékař EDWARD WARING (1734 -- 1798) bez důkazu následující tvrzení:

Každé přirozené číslo je součtem nejvýše devíti třetích mocnin, nejvýše devatenácti čtvrtých mocnin a tak dále.

Přitom nespecifikoval, co rozumí úslovím „a tak dále“, ani nenaznačil, jak na svou úvahu přišel. Lze se jen domýšlet, že uvedený úsudek zformuloval na základě empiricky získaných výsledků pro relativně „malá“ čísla.

Edward WARING

Během doby se z této úlohy vyvinul následující **Waringův problém**:

Existuje ke každému přirozenému číslu k takové přirozené číslo $g(k)$, že každé přirozené číslo je součtem nejvýše $g(k)$ k-tých mocnin?

Problém byl mnohem těžší, než se zpočátku zdálo. Existenci čísla $g(k)$ pro každé přirozené číslo k dokázal až v r. 1909 německý matematik DAVID HILBERT (1862 -- 1943), jeden z největších matematiků konce 19. a první poloviny 20. století. Problém určení čísel $g(k)$ však zůstal i poté otevřen.

Pro třetí mocniny je Waringovo tvrzení pravděpodobně správné, přičemž jsou známa pouze dvě přirozená čísla, k jejichž vyjádření je opravdu nutno využít 9 třetích mocnin:

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$$

$$239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 \ .$$

(Kdybychom ovšem připustili i třetí mocniny **záporných** čísel, platilo by například
$23 = 3^3 + 4 \times (-1)^3$, takže bychom vystačili s pěti třetími mocninami.)

Až v roce 1986 dokázali správnost Waringova tvrzení pro k=4 RAMACHANDRAN BALASUBRAMANIAN, JEAN-MARC DESHOULLIERS a FRANCOIS DRESS. Nejmenším číslem, k jehož vyjádření skutečně potřebujeme 19 čtvrtých mocnin je 79, neboť

$$79 = 15 \times 1^4 + 4 \times 2^4 \ .$$

Další známá čísla s touto vlastností jsou 159, 239, 319, 399 a 559. Pro další mocniny *k* není dodnes hodnota g(k) známa. Předpokládá se pouze, že každé přirozené číslo je součtem nejvýše 37 pátých mocnin, nejvýše 73 šestých mocnin a nejvýše 137 sedmých mocnin.